

Eine kombinatorische Beschreibung der Heegaard-Floer-Knoten-Homologie

Gerrit Herrmann

24.10.2013

Inhaltsverzeichnis

1	Gitterdiagramme	3
1.1	Definition und erste Eigenschaften	3
1.2	Cromwell-Bewegungen	5
1.3	Fundamentalgruppe und erste Homologie	6
2	Konstruktion des Komplexes $C(G_L)$	7
2.1	Die Konstruktion	8
2.2	Wohldefiniertheit der Konstruktion	13
3	Algebraische Eigenschaften von $C(G_L)$	19
3.1	\mathbb{Q}^l -Filtrierung	19
3.2	Die Komplexe $\widehat{CL}(L)$ und $\widetilde{CL}(G_L)$	20
4	Topologische Eigenschaften von $\widehat{HL}(L)$	24
5	Ein Beispiel	28
6	Appendix	30
6.1	Abbildungskegel	30
6.2	Frei erzeugter R -Modul	32
6.3	Gruppenring	32
6.4	Fox-Kalkül	34
6.5	Berechnung des Alexander-Polynoms mit Hilfe des Fox-Kalküls	36

Einleitung

Motivation

In der Knotentheorie studiert man Isotopie-Typen von Einbettungen $K : S^1 \rightarrow S^3$, die sogenannten Knoten. Als Hilfsmittel betrachtet man Knoten-Invarianten. Diese ordnen einem Knoten eine Kennung zu, die sich unter Isotopie nicht ändert. Eine Kennung kann alles Mögliche sein wie eine Zahl oder eine Gruppe. Wie brauchbar eine solche Knoten-Invariante ist, hängt von verschiedenen sich oftmals ausschließenden Faktoren ab. Zunächst sollte eine Knoten-Invariante möglichst viele, am Besten alle Informationen über den Knoten enthalten. Des Weiteren sollte es möglich sein, bei gegebenen Knoten die Invariante zu bestimmen. Die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie ist eine solche Knoten-Invariante. Sie ordnet einem Knoten oder allgemeiner einer Verschlingung L in ihrer einfachsten Form einen \mathbb{F}_2 -Vektorraum zu. Dieser Vektorraum ist mit einer zusätzlichen Struktur versehen, mit deren Hilfe man klassische Knoten-Invarianten, wie das Alexander-Polynom oder das Seifert-Geschlecht, bestimmen kann. Sie erfüllt also die erste zu wünschende Eigenschaft an eine Knoten-Invariante, dass sie noch genug Informationen enthält. In ihrer ursprünglichen Form war sie "schwer" zu berechnen. Die kombinatorische Beschreibung, die C. Manolescu, P. Ozsváth, und S. Sarkar in [6] erstmals vorstellten, macht die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie zu einer sehr nützlichen Invariante, da Sie damit auch der zweiten Anforderung gerecht wird, berechenbar zu sein. Mit kombinatorischer Beschreibung ist hier eine Möglichkeit gemeint, die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie zu bestimmen, die so elementar ist, dass man sie in einem Computer implementieren kann.

Aufbau der Arbeit

Der Aufbau dieser Arbeit ist angelehnt an die Arbeit [7] von C. Manolescu, P. Ozsváth, Z. Szabó, und D. Thurston. Nur bei der Definition der Maslov-Graduierung und der Alexander-Filtrierung greifen wir auf die Definition aus [6] zurück. Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer bestimmten Präsentation von Verschlingungen, den Gitterdiagrammen. Die Gitterdiagramme stellen die Grundlage für unsere Berechnung dar. Im zweiten Abschnitt konstruieren wir anhand dieser Diagramme einen Kettenkomplex, dessen Homologie, die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie ist. Im dritten Abschnitt beweisen wir ein paar algebraische Eigenschaften der Heegaard-Floer-Knoten-Homologie, die bei der Berechnung helfen. Im vierten Abschnitt zeigen wir dann, wie man aus der Heegaard-Floer-Knoten-Homologie einer Verschlingung L das Alexander-Polynom von L ableitet. Dazu greifen wir auf eine Definition des Alexander-Polynoms zurück, die mithilfe der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements und des Fox-Kalküls realisiert wird. Eine kurze Einführung dazu findet sich in der Appendix. Dort stehen auch weitere algebraische Konstruktionen, die in den Beweisen verwendet werden. An den entsprechenden Stellen finden sich jeweils Verweise. Zwischen dem letzten Abschnitt und der Appendix, ist ein Beispiel angegeben. Während des Lesens der ganzen Arbeit lohnt es sich, immer wieder ein Blick auf dieses Beispiel zu werfen.

1 Gitterdiagramme

1.1 Definition und erste Eigenschaften

Ein *Gitterdiagramm* G ist ein $n \times n$ -Feld von Quadraten mit weißen und schwarzen Punkten, so dass

- jedes Feld entweder genau einen weißen oder einen schwarzen oder gar keinen Punkt enthält,
- in jeder Zeile genau ein weißer und ein schwarzer Punkt sind und
- in jeder Spalte genau ein weißer und ein schwarzer Punkt sind.

Wir erhalten aus einem Gitterdiagramm G eine orientierte Verschlingung, indem wir horizontal und vertikal die Punkte miteinander verbinden. Sollten sich so zwei Stränge kreuzen, dann ist der vertikale Strang immer der Überkreuzende. Die Orientierung ist gegeben dadurch, dass wir horizontal vom weißen zum schwarzen Punkt gehen. Ein Gitterdiagramm G_L einer orientierten Verschlingung L ist ein Gitterdiagramm, das isotop ist zu L .

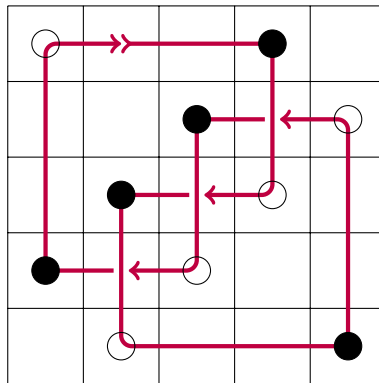


Abbildung 1: Der Kleeblattknoten in einem Gitterdiagramm.

Bemerkung 1.1. Für spätere Zwecke wird es nützlich sein, das Diagramm als Teilmenge des \mathbb{R}^2 aufzufassen. Die linke untere Ecke des Diagramms soll dann im Ursprung liegen und jedes Quadrat $S_{a,b}$ mit $a, b \in \{0, \dots, n-1\}$ wird mit dem Intervall

$$S_{a,b} = [a, a + 1] \times [b, b + 1]$$

identifiziert, so dass das ganze Diagramm dann im Intervall $[0, n] \times [0, n]$ liegt. Wir nummerieren die schwarzen und weißen Punkten anhand der x -Achse durch und bezeichnen mit $\mathbb{B} = \{X_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ bzw. $\mathbb{W} = \{O_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ die Menge der schwarzen bzw. weißen Punkte. Ein Punkt soll genau in der Mitte eines Quadrates liegen, somit dann gilt:

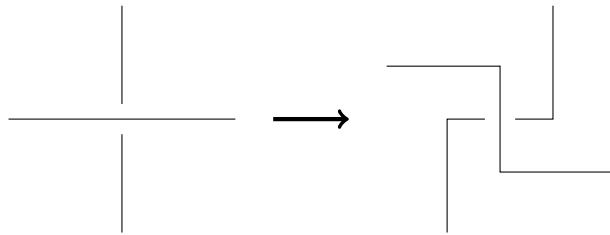
$$\mathbb{B}, \mathbb{W} \subset \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\right)^2.$$

Wir wollen mit $\alpha_i = \{i\} \times [0, n]$ die vertikalen und mit $\beta_i = [0, n] \times \{i\}$ die horizontalen Gitterlinien beschreiben.

Definition 1.2. Der Bogen-Index $\alpha(L)$ einer orientierten Verschlingung L bezeichnet das kleinste $n \in \mathbb{N}$, sodass es ein Gitterdiagramm der Größe n von L gibt.

Lemma 1.3. *Der Bogen-Index ist wohldefiniert. Das heißt, jede Verschlingung L besitzt ein Gitterdiagramm.*

Beweis. Man kann sich leicht überlegen, dass man ein gegebenes Diagramm durch Isotopien der Ebene in ein Diagramm überführen kann, das nur noch rechtwinklige Ecken hat und in dem keine zwei vertikalen bzw. horizontalen Linien auf derselben Höhe liegen. Dann färben wir die Eckpunkte anhand der Orientierung abwechselnd schwarz und weiß ein. Es bleibt das Problem, dass die vertikalen Stränge nicht immer die Überkreuzenden sind. Das lässt sich aber wie folgt lösen:



Das entstehende Diagramm ist ein Gitterdiagramm. □

Lemma 1.4. *Sei $s(L)$ der Braid-Index einer Verschlingung L , dann gilt $\alpha(L) \geq 2s(L)$.*

Beweis. Sei G_L ein Gitterdiagramm der Größe $\alpha(L) = n$. Wir denken uns eine Trennlinie durch das Gitterdiagramm, die durch die Mittelpunkte der horizontalen Knotensegmente geht. Diese Linie teilt unser Diagramm in zwei Teile. Nun ist im linken Teil die Anzahl der schwarzen oder der weißen Punkten kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Wir nehmen an, die Anzahl der weißen Punkte sei kleiner gleich $\frac{n}{2}$. Die zu diesen Punkten gehörenden horizontalen Stränge sollen nun, aus Sicht des Betrachters, hinter der Trennlinie verlaufen und die anderen davor. Es entsteht ein geschlossener Zopf, der um die gedachte Trennlinie läuft mit weniger als $\frac{n}{2}$ Stränge. Hier am Beispiel des Achter-Knoten.

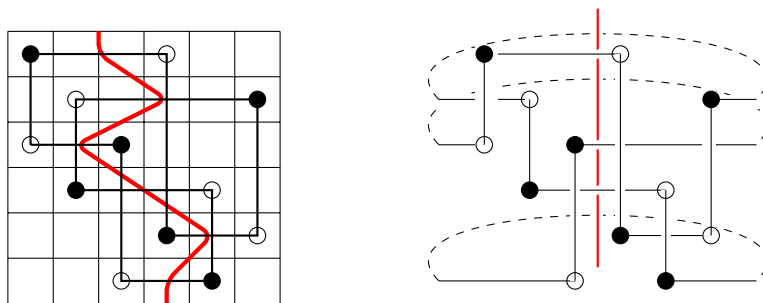


Abbildung 2: Der Achter-Knoten wird in einen geschlossenen Zopf umgewandelt.

□

Dieser Beweis zusammen mit dem Beweis von Lemma 1.3 liefert einen sehr einfachen Algorithmus, der eine gegebene Verschlingung als geschlossenen Zopf darstellt.

1.2 Cromwell-Bewegungen

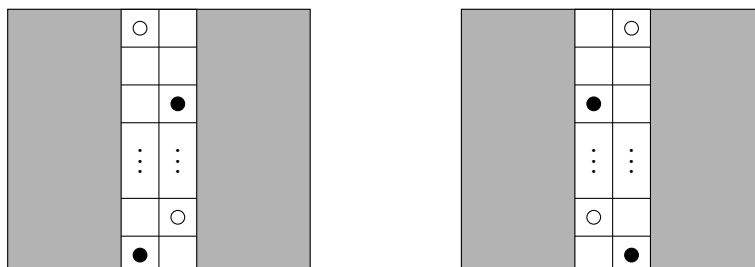


Abbildung 3: Hier werden zwei Nachbarn vertauscht

Für Gitterdiagramme gibt es analog zu den Reidemeister-Bewegungen die sogenannten Cromwell-Bewegungen. Man kann diese Bewegungen in drei Klassen einteilen.

1. **Zyklische Permutation.** Alle Spalten oder alle Zeilen werden zyklisch permutiert.
2. **Vertauschung von Nachbarn.** Stellen wir uns zwei aufeinanderfolgende Spalten vor, sodass X_i und O_i einer Spalte zwischen den X_j und dem O_j der anderen Spalte liegt. Dann können die beiden Spalten getauscht werden. Analoges gilt für die Zeilen (s. Abb. 3).
3. **Stabilisation und Destabilisation.** Wenn G_L die Größe n hat, dann ist eine Stabilisation an einem weißen Punkt O_i ein Gitterdiagramm H_L der Größe $n + 1$, das wir erhalten, indem wir in G_L eine Zeile und eine Spalte einfügen. Wenn der Punkt O_i in der i -ten Spalte und in der j -ten Zeile liegt, dann wird die neue Spalte zwischen der i -ten und $i + 1$ -ten Spalte und eine neue Zeile zwischen der j -ten und $j + 1$ -ten Zeile eingefügt. Nun haben wir drei neue leere Felder um den Punkt O_i . Zusammen mit dem Feld von O_i macht das vier Felder, womit wir vier Möglichkeiten erhalten, diese vier Felder zu belegen, so dass wir ein gültiges Gitterdiagramm erhalten, wobei eventuell der schwarze Punkt, der vorher in derselben Spalte wie O_i war, in die neue Spalte verschoben werden muss. Dasselbe gilt für den schwarzen Punkt, der in derselben Zeile wie O_i lag (s. Abb. 4). Destabilisation ist die Umkehrbewegung. Analoges kann man natürlich auch mit einem schwarzen Punkt machen.

Wir sagen zwei Gitterdiagramme G_1 und G_2 sind äquivalent, wenn es eine endliche Folge von Cromwell-Bewegungen gibt, die G_1 in G_2 überführen.

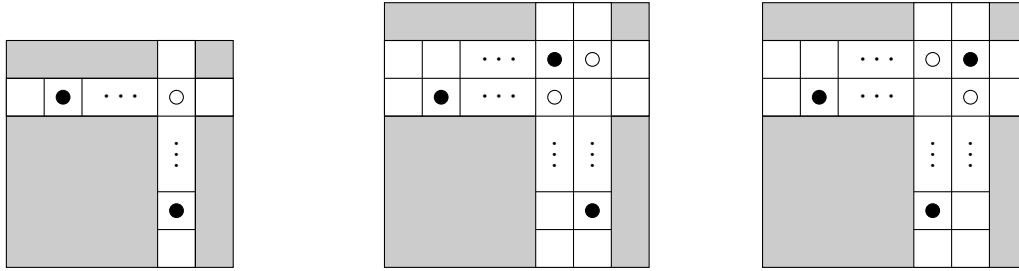


Abbildung 4: Zwei der Möglichkeiten, eine Stabilisationsbewegung am weißen Punkt auszuführen.

Satz 1.5. *Zwei Verschlingungen sind äquivalent, wenn deren Gitterdiagramme äquivalent sind.*

Ein Beweis des Satzes findet sich bei [3].

1.3 Fundamentalgruppe und erste Homologie

Mit Hilfe von Gitterdiagrammen kann man eine Präsentation für die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements angeben. Diese Präsentation geht auf Neuwirth zurück, weshalb wir sie im Folgenden auch mit Neuwirth-Präsentation bezeichnen. Wir entwickeln diese Darstellung anhand des Achterknotens. Dazu wählen wir als Basispunkt den Betrachter des Gitterdiagramms. Die Erzeuger der Präsentation sind die Schleifen, die einmal gegen den Uhrzeigersinn um die vertikalen Stränge des Gitterdiagramms laufen. Wir identifizieren dann einen Erzeuger mit einem Strang. Als Relationen erhalten wir die Wörter aus x_1, \dots, x_n wie folgt. Wir verfolgen die Linie β_i von links nach rechts und schreiben für jeden Schnittpunkt mit einem vertikalen Strang den entsprechenden Erzeuger x_j auf. Das entstehende Wort entspricht einer Relation. Dies machen wir für alle Linien β_1 bis β_{n-1} .

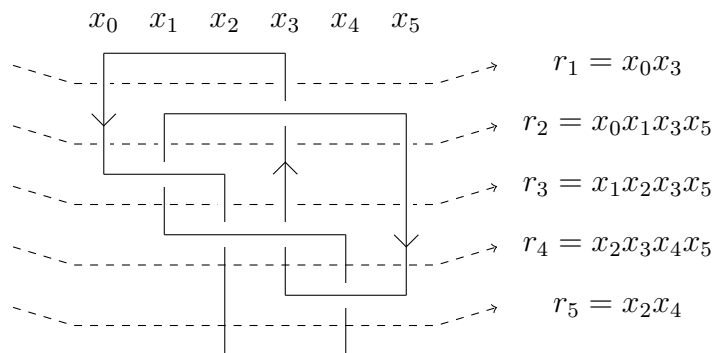


Abbildung 5: Die Erzeuger und Relationen eines Gitterdiagramms.

In unserem Beispiel erhalten wir also die sechs Erzeuger x_0 bis x_5 und die fünf Relationen:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_0x_3 \\ r_2 &= x_0x_1x_3x_5 \\ r_3 &= x_1x_2x_3x_5 \\ r_4 &= x_2x_3x_4x_5 \\ r_5 &= x_2x_4 \end{aligned}$$

Satz 1.6. *Die Neuwirth-Präsentation ist eine Präsentation von $\pi(S^3 \setminus L)$.*

Beweis. Zunächst ist jede Schleife außerhalb der Verschlingung zusammenziehbar und somit trivial. Wenn eine Schleife durch unsere Verschlingung geht, dann sehen wir, dass sich diese Schleife $\gamma \in \pi(S^3 \setminus L)$ als Komposition von x_1, \dots, x_n schreiben lässt. Andererseits sind die Schleifen der Form $\gamma = r_i$ trivial, da wir sie über die Verschlingung hinweg heben können und diese damit wieder zusammenziehbar werden. Diese Überlegung kann man zu einem formellen Beweis ausbauen, indem wir den Satz von Seifert-van Kampen auf die Ausschnitte anwenden, die wir für jedes r_i erhalten. \square

Wir wollen für spätere Anwendungen eine Verbindung zur Homologie herstellen. Sei L eine l -komponentige Verschlingung. Es gilt bekanntlich $H_1(S^3 \setminus L) = \mathbb{Z}^l$ für die erste Homologie. Angenommen der Erzeuger x_i läuft um die j -te Komponente der Verschlingung, dann ist $[x_i]_{ab}$ ein Erzeuger des j -ten Summanden von $H_1(S^3 \setminus L)$. Dabei sind wir noch frei bei der Wahl der Orientierung. Wir legen uns darauf fest, dass die Orientierung durch die Rechte-Hand-Regel als positiv gegeben ist, so dass in unserem Beispiel x_0 auf -1 und x_3 auf $+1$ geschickt wird. Wenn K_j die j -te Komponente von L ist, erhalten wir die Hurwitz-Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi : \pi(S^3 \setminus L) &\longrightarrow H_1(S^3 \setminus L) \\ x_i &\mapsto (lk(x_i, K_1), \dots, lk(x_i, K_l)). \end{aligned}$$

Hier bezeichnet $lk(,)$ die Verschlingungszahl.

2 Konstruktion des Komplexes $C(G_L)$

Ziel dieses Abschnittes ist es, einer Verschlingung L einen geeigneten Kettenkomplex zuzuordnen, sodass die Homologiegruppen Invarianten der Verschlingung sind. Die Homologie des Komplexes wird dann die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie sein. Für das bessere Verständnis ist dieses Kapitel zweigeteilt. Im ersten Teil werden wir den Kettenkomplex konstruieren und erst im zweiten Teil werden die Beweise geführt, um nicht die wesentlichen Dinge der Konstruktion zu unterbrechen.

2.1 Die Konstruktion

Ausgangspunkt unserer Konstruktion ist ein Gitterdiagramm G_L der Verschlingung L . Sei n die Größe von G_L . Unser Kettenkomplex $C(G_L)$ wird der freie $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$ -Modul über der Menge \mathbf{S}^1 , wobei

$$\mathbf{S} := \{ \{(i, \sigma(i))\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset \mathbb{Z}^2 \mid \sigma \in S_n \}$$

die Menge der Graphen der Permutationen aus S_n ist. Im Folgenden werden wir jede Permutation σ mit ihrem Graphen identifizieren. Als Nächstes versehen wir diesen Modul mit einem Differential und einer Graduierung. Dazu erinnern wir nochmal an Bemerkung 1.1 und können G_L als Fundamentalbereich eines Torus auffassen, indem wir die Linien α_0 mit α_n und β_0 mit β_n verkleben. Außerdem ist ein Element aus \mathbf{S} eine Teilmenge von G_L . Ein zentraler Aspekt für die Definition des Differentials ist

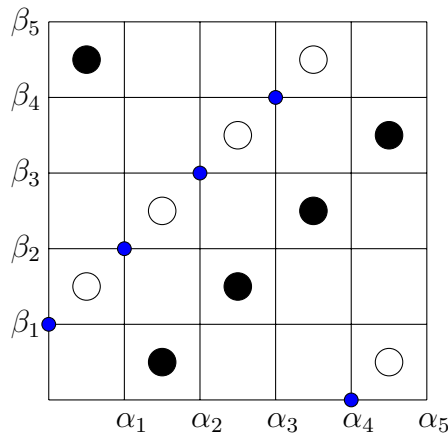
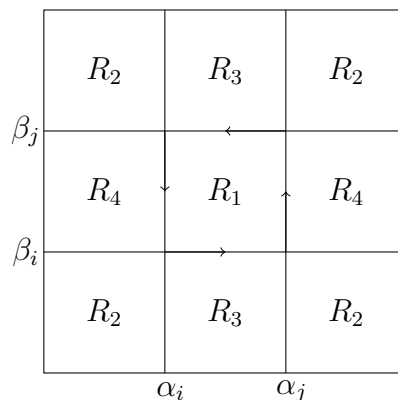


Abbildung 6: Der Graph der Permutation σ_0 als Teilmenge des Gitterdiagramms.

folgende Überlegung. Seien σ und τ zwei Permutationen, die sich um eine Transposition unterscheiden, das heißt sie unterscheiden sich in genau zwei Werten, sagen wir $i < j$, dann ist es leicht zu sehen, dass die Gitterlinien $\alpha_i, \alpha_j, \beta_i, \beta_j$ unseren Torus in vier Rechtecke aufteilen.



¹Hierbei ist die Konstruktion aus Definition 6.5 gemeint.

Wir versehen die Rechtecke mit der Standard-Orientierung des Torus, was uns eine Randorientierung induziert, die gegen den Uhrzeigersinn läuft. Dann bezeichnen wir mit $R(\sigma, \tau)$ die zwei Rechtecke, deren horizontale Linien in Richtung der Orientierung von σ nach τ gehen. Die anderen beiden Rechtecke bilden die Menge $R(\tau, \sigma)$. Sei $r \in R(\sigma, \tau)$, dann definieren wir

$$W(r) = \#\mathbb{W} \cap r^\circ$$

und analog

$$B(r) = \#\mathbb{B} \cap r^\circ$$

als die Anzahl der weißen bzw. schwarzen Punkte in r und mit

$$P'_\sigma(r) = \#\sigma \cap r^\circ$$

die Anzahl der Punkte von σ im Inneren von r . Außerdem bezeichnen wir mit

$$O_i(r) = \begin{cases} 1 & O_i \in r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$X_i(r) = \begin{cases} 1 & X_i \in r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge $\{O_i\}$ bzw. $\{X_i\}$. Die Maslov-Graduierung M ist bis auf eine additive Konstante durch

$$M(\sigma) - M(\tau) = 1 + P'_\sigma(r) + P'_\tau(r) - 2W(r) \quad (2.1)$$

charakterisiert. Diese Gleichung nennen wir im Folgenden Maslov-Gleichung. Um die Konstante einheitlich festzulegen, zeichnen wir die Permutation σ_0 aus, deren Graph genau die linken unteren Ecken der weißen Punkte beschreibt und legen den Wert durch $M(\sigma_0) = 1 - n$ fest. Wir werden sehen, dass M eindeutig festgelegt ist für alle $\sigma \in \mathbf{S}$, da sich jedes Element aus der S_n als Komposition von Transpositionen schreiben lässt. Man kann die obige Formel sogar noch weiter vereinfachen zu

$$M(\sigma) - M(\tau) = 1 + 2P'_\sigma(r) - 2W(r), \quad (2.2)$$

da $P'_\sigma(r) = P'_\tau(r)$ gilt. Aber für spätere Überlegungen ist es günstig, zwischen beiden zu unterscheiden.

Definition 2.1 (Differential). Das Differential $\partial : C(G_L) \rightarrow C(G_L)$ ist gegeben durch:

$$\partial(\sigma) = \sum_{\tau \in S_n} \sum_{\substack{r \in R(\sigma, \tau) \\ r^\circ \cap \sigma = \emptyset}} U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau$$

mit der Konvention, dass $R(\sigma, \tau) = \emptyset$, wenn σ und τ sich um mehr als eine Transposition unterscheiden. Die Bedingung $r^\circ \cap \sigma = \emptyset$ werden wir im Folgenden auch mit "r ist leer" bezeichnen und schreiben für die Menge der leeren Rechtecke $R^\circ(\sigma, \tau)$. Wir setzen ∂ linear auf $C(G_L)$ fort.

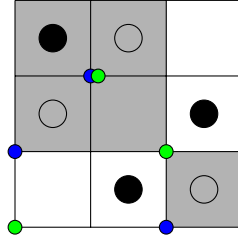
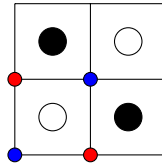


Abbildung 7: Der blaue Graph ist σ_0 und der grüne sei τ . Die Verbindungsrechtecke $R(\sigma_0, \tau) = \{r_1, r_2\}$ sind grau hinterlegt (r_1 links und r_2 rechts). Da $W(r_1) = 2$ und $P'_{\sigma_0}(r_1) = 1$ gilt, können wir $M(\tau) = -1$ bestimmen. Weil r_1 nicht leer ist, trägt r_1 nichts zur Summe von $\partial\sigma_0$ bei. Hingegen steuert r_2 den Summanden $U_3\tau$ zu $\partial\sigma_0$ bei.

Wie bereits erwähnt, werden wir erst im nächsten Abschnitt zeigen, dass es sich wirklich um ein Differential handelt, also $\partial^2 = 0$ gilt. Unter dieser Annahme betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 2.2. Nehmen wir als Diagramm des Unknotens:



Wir haben die zwei Erzeuger \mathbf{x} in blau und \mathbf{y} in rot und die Differentiale

$$\begin{aligned}\partial(\mathbf{x}) &= U_1\mathbf{y} + U_2\mathbf{y} \\ \partial(\mathbf{y}) &= \mathbf{x} + \mathbf{x} = 0.\end{aligned}$$

Betrachten wir die Homologie $H_*(C(L), \partial) = \ker \partial / \text{im } \partial$, erhalten wir

$$\mathbb{F}_2[U_1, U_2] \cdot \mathbf{y} / (U_1\mathbf{y} = U_2\mathbf{y}) \cong \mathbb{F}_2[U_1].$$

Wir wollen den Komplex nun mit einer zusätzlichen Filtrierung versehen und erinnern dafür an eine Definition aus Funktionentheorie.

Definition 2.3 (Windungszahl). Sei γ eine geschlossene Kurve in \mathbb{C} und $p \in \mathbb{C} \setminus \text{im } \gamma$, dann nennen wir

$$w(p) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - p}$$

die Windungszahl im Punkt p .

Bemerkung 2.4. Die Windungszahl ist immer eine ganze Zahl und gibt an, wie oft sich eine geschlossene Kurve um den Punkt p dreht.

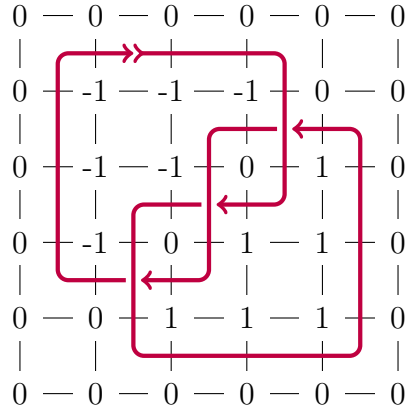


Abbildung 8: Ein Bild des Kleeblattknotens, wo wir in jedem Schnittpunkt von α_i mit β_j die Windungszahl eingetragen haben. Um die Windungszahl eines Punktes p zu bestimmen gehen wir von p horizontal nach links und zählen wie oft wir einen vertikalen Strang kreuzen. Für jeden Strang der von oben nach unten läuft zählen wir $+1$ und für jeden der von unten nach oben läuft -1 .

Betrachten wir zunächst einmal nur einen Knoten K statt einer Verschlingung. Wir können unser Gitterdiagramm als Teilmenge von \mathbb{C} auffassen und die Projektion von K als geschlossene Kurve γ . Dann tragen wir in jedem Schnittpunkt von α_i mit β_j die Windungszahl des Punktes ein. Für eine Verschlingung machen wir dies für jede Komponente. In diesem Fall ist dann an jedem Punkt ein Vektor, wo jeder Eintrag zu einer Komponente gehört. Nun betrachten wir für unsere Erzeuger aus \mathbf{S} die folgende Filtrierung.

Definition 2.5. Jeder weiße und jeder schwarze Punkt hat vier Eckpunkte. Seien p_1, \dots, p_{8n} diese Eckpunkte. Sei n_i die Anzahl der weißen Punkte von der i -ten Komponente und w_i die Windungszahl der i -ten Komponente. Dann definieren wir

$$A_i(\sigma) = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{8n} w_i(p_k) - \sum_{p \in \sigma} w_i(p) - \frac{n_i - 1}{2}$$

und bezeichnen mit

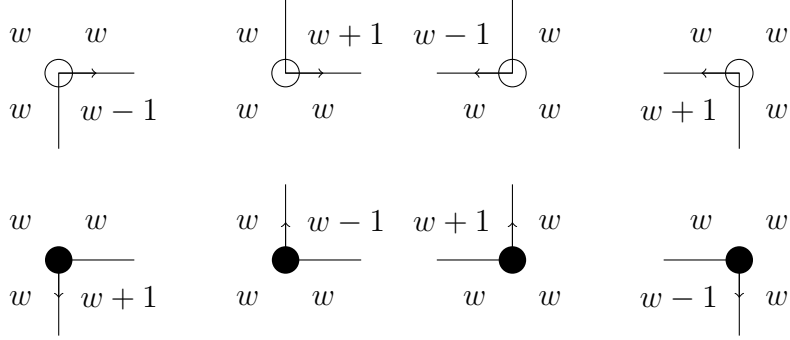
$$A(\sigma) = (A_1(\sigma), \dots, A_l(\sigma))$$

die Alexander-Filtrierung.

Da die Windungszahlen auf den Linien $\alpha_0, \alpha_n, \beta_0, \beta_n$ alle null sind, ist es egal, wie ein Erzeuger σ auf unser Gitterdiagramm gezeichnet wird.

Lemma 2.6. Für jedes $\sigma \in \mathbf{S}$ ist $A(\sigma) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^l$.

Beweis. Wir müssen die Aussage natürlich nur komponentenweise zeigen und betrachten die i -te Komponente. Außerdem reicht es, $\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{8n} w_i(p_i) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ zu zeigen. Sollte ein schwarzer oder weißer Punkt nicht zur i -ten Komponente gehören, dann haben alle vier Randpunkte dieselbe Windungszahl w . Also trägt dieser Punkt $\frac{4w}{8}$ als Summand bei. Nun schauen wir uns alle anderen Summanden an, die zur i -ten Komponente beitragen.



Stellen wir uns vor, wir laufen auf dem Knoten entlang der Orientierung. Dann unterscheiden wir zwischen Links- und Rechtskurven je nachdem, ob wir nach links oder rechts abbiegen. Die Rechtskurven liefern $\frac{4w_i}{8} - \frac{1}{8}$ und die Linkskurven $\frac{4w_i}{8} + \frac{1}{8}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll der obere Punkt am linken Rand weiß sein, also eine Rechtskurve. Da wir einen Knoten und somit eine geschlossene Kurve betrachten, müssen wir am Ausgangspunkt wieder ankommen. Dabei müssen wir insgesamt viermal nach rechts abbiegen und erhalten $4 \cdot (-\frac{1}{8}) = -\frac{1}{2}$. Nun heben sich, beim gleichzeitigen Hinzufügen von einer Links- und einer Rechtskurve, die $\frac{1}{8}$ -Anteile weg. Der letzte Fall, den wir noch behandeln müssen, ist die Tatsache, dass dreimal Linksabbiegen einmal Rechtsabbiegen ersetzt. Dabei entfällt eine Rechtskurve, also in der Summe fällt $-\frac{1}{8}$ weg und es kommen jeweils dreimal $+\frac{1}{8}$ durch die Linkskurven hinzu. Also bleibt auch hier die Summe halbzahlig. \square

Wir wollen noch angeben, wie sich die Graduierung und Filtrierung bei den anderen Elementen aus $C(G_L)$ verhält. Sei $U_1^{m_1} \dots U_n^{m_n} \cdot \sigma \in C(G_L)$, dann setzen wir:

$$M(U_1^{m_1} \dots U_n^{m_n} \cdot \sigma) = M(\sigma) - 2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i$$

und für die Filtrierung betrachten wir Folgendes. Wenn O_i zu der j -ten Komponente von L gehört, dann sei $g : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Q}^l$ die Abbildung, die i den Basis-Vektor e_j zuordnet. Dann definieren wir

$$A(U_1^{m_1} \dots U_n^{m_n} \cdot \sigma) = A(\sigma) - \sum_{i=1}^n m_i g(i).$$

Mit anderen Worten senkt Multiplikation mit U_i die Maslov-Graduierung um zwei und die Alexander-Filtrierung um eins. Für Summen lassen wir M und A weiter undefiniert.

Die Graduierung und die Filtrierung liefern uns eine Familie von Untermoduln von $C(G_L)$. So wird die Menge C_d von Elementen $U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n} \cdot \sigma$ mit

$$M(U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n} \cdot \sigma) = d$$

erzeugt. Sei $q = (q_1, \dots, q_l) \in \mathbb{Q}^l$. Wir bezeichnen dann mit $F_q C$ den Untermodul der von allen Elementen $U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n} \cdot \sigma$ mit

$$q \geq A(U_1^{m_1} \cdots U_n^{m_n} \cdot \sigma)$$

erzeugt wird, wobei mit \geq die übliche partielle Ordnung von \mathbb{Q}^l gemeint ist, d.h. $(a_1, \dots, a_l) \leq (b_1, \dots, b_l)$, genau dann, wenn $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, l\}$.

2.2 Wohldefiniertheit der Konstruktion

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Aussagen zeigen. Zunächst ist die Behauptung, dass die Maslov-Gleichung uns eine Abbildung M definiert. Diese Abbildung M nennen wir dann Maslov-Graduierung. Danach zeigen wir, dass $C(G_L)$ ein filtrierter Kettenkomplex ist, d.h.

1. $\partial^2 = 0$,
2. $\partial(C_d) \subset C_{d-1}$,
3. $\partial(F_s C) \subset F_s C$.

Für den Beweis zur Maslov-Graduierung ist es nützlich etwas allgemeinere Verbindungsflächen als nur die Rechtecke zu definieren. Dazu betrachten wir die freie abelsche Gruppe Γ , erzeugt durch die Quadrate $S_{a,b}$ aus G_L . Sei $A \subset G_L$ dann definieren wir:

$$\delta_A(S_{a,b}) = \begin{cases} 1 & A \cap S_{a,b} \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nun definieren wir die Abbildung W neu und geben eine zu P'_σ ähnliche Definition P_σ an durch

$$W\left(\sum_{a,b} c_{a,b} S_{a,b}\right) = \sum_{a,b} c_{a,b} \delta_W(S_{a,b})$$

und

$$P_\sigma\left(\sum_{a,b} c_{a,b} S_{a,b}\right) = \frac{1}{4} \sum_{a,b} c_{a,b} \delta_\sigma(S_{a,b}).$$

Ein Rechteck $r \in R(\sigma, \tau)$ betrachten wir als die Summe $\sum_{a,b} \delta_r(S_{a,b}) S_{a,b}$. Dann ändert sich die Maslov-Gleichung zu

$$M(\sigma) - M(\tau) = P_\sigma(r) + P_\tau(r) - 2W(r). \quad (2.3)$$

Man sieht leicht, dass die Definition mit der vorherigen übereinstimmt, denn P_σ zählt die Eckpunkte des Rechtecks mit im Gegensatz zu P'_σ , was aber durch das +1 in Formel 2.1

ausgeglichen wird. Der Vorteil der neuen Definition ist, dass wir sie problemlos auf beliebige Paare von Permutationen erweitern können und die Bedingung, dass Sie sich nur um eine Transposition unterscheiden, fallen lassen können. r ist dann aber im Allgemeinen kein Rechteck mehr sondern irgendeine Fläche, deren Rand mit der vom Torus induzierten Orientierung die Permutation σ mit τ verbindet. Also horizontal Punkte von σ nach τ und vertikal Punkte von τ nach σ verbindet. Wir bezeichnen dann die Menge dieser Flächen mit $F(\sigma, \tau)$.

Satz 2.7. *Die Maslov-Gleichung 2.1 definiert eine eindeutige Abbildung M mit $M(\sigma_0) = 1 - n$.*

Beweis. Eindeutigkeit. Seien M und M' Abbildungen, für die $M(\sigma_0) = M'(\sigma_0) = 1 - n$ gilt und die der Maslov-Gleichung genügen. Sei $d(\sigma, \tau)$ die minimale Anzahl an Transpositionen um von σ nach τ zu gelangen. Wir zeigen $M = M'$ mit Induktion über $d(\sigma_0, -)$. Für $k = 0$ haben wir nur den Fall $d(\sigma_0, \sigma_0) = 0$ und für den gilt nach Voraussetzung $M(\sigma_0) = M'(\sigma_0) = 1 - n$. Es gelte nun für alle $\tau \in \mathbf{S}$ mit $d(\sigma_0, \tau) \leq k - 1$ die Gleichheit $M(\tau) = M'(\tau)$. Sei $\sigma \in \mathbf{S}$ mit $d(\sigma_0, \sigma) = k$. Wir finden also eine Folge von Transpositionen, sodass $\tau_1 \cdots \tau_k \sigma = \sigma_0$ gilt. Offensichtlich gilt dann $d(\sigma_0, \tau_k^{-1} \sigma) \leq k - 1$. Sei $r \in R(\sigma, \tau_k^{-1} \sigma)$, dann gilt:

$$M(\sigma) = M(\tau_n^{-1} \sigma) + 2P_{\tau_n^{-1} \sigma}(r) - 2W(r) = M'(\tau_n^{-1} \sigma) + 2P_{\tau_n^{-1} \sigma}(r) - 2W(r) = M'(\sigma).$$

Existenz. Wir müssen natürlich noch zeigen, dass eine Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft existiert. Seien also $\sigma, \tau \in \mathbf{S}$ beliebig. Wir zeigen zunächst, dass die Maslov-Gleichung nicht von der Wahl des Rechtecks $r \in R(\sigma, \tau)$ abhängt. Dazu betrachten wir die Summe

$$D_i = \sum_{j=0}^{n-1} S_{i,j}.$$

Dies entspricht genau einer Spalte unseres Gitterdiagramms also der Fläche zwischen den Gitterlinien α_i und α_{i+1} . In jeder Spalte ist genau ein weißer Punkt, daher $W(D) = 1$. Außerdem liegt jeweils genau ein Punkt von σ auf α_i und einer auf α_{i+1} . Diese berühren jeweils zwei Quadrate. Also $P_\sigma(D) = 1$. Das gleiche Argument hält auch für τ und somit $P_\tau(D) = 1$. Schließlich folgt die Identität:

$$0 = P_\tau(D) + P_\sigma(D) - 2W(D).$$

Nun kann man sich davon überzeugen, dass zwei Verbindungsrechtecke sich nur um die Addition und Subtraktion von Streifen unterscheiden (vgl. Abb. 7). Die Abbildung M wird jetzt wie folgt konstruiert. Wir starten mit allen Elementen $T_1 \subset \mathbf{S}$, die sich von σ_0 um genau eine Transposition unterscheiden. Betrachten wir nun alle Elemente T_2 , die sich von σ_0 um genau zwei Transpositionen unterscheiden, dann existiert für jedes $\tau \in T_2$ ein $\sigma \in T_1$, sodass wir Formel 2.1 benutzen können. Dieses σ ist natürlich nicht eindeutig. Wir zeigen also, dass es nicht von der Wahl von σ abhängt. Das machen wir über Induktion nach der Menge T_k und zeigen, dass alle Elemente aus T_{k-1} untereinander

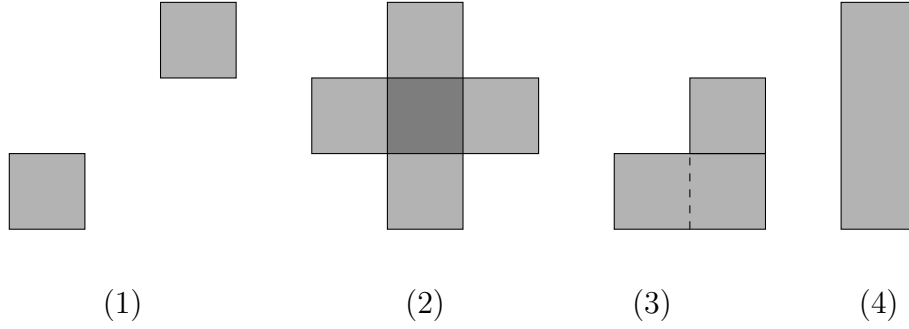


Abbildung 9: Beispiele für Verbindungsflächen von dem Produkt von zwei Transposition. (1) und (2) erhält man durch Doppeltransposition. (3) entspricht dem Dreier-Zykel und (4) der Identität.

die Maslov-Gleichung 2.3 erfüllen. Dazu beginnen wir mit dem Fall, dass $\sigma, \tau \in \mathbf{S}$ sich von σ_0 jeweils nur um eine Transposition unterscheiden. Für $r_1 \in R(\sigma, \sigma_0)$ und $r_2 \in R(\sigma_0, \tau)$ gilt dann:

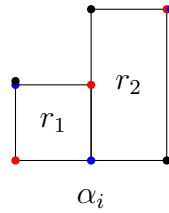
$$\begin{aligned}
 M(\sigma) &= M(\sigma_0) + P_\sigma(r_1) + P_{\sigma_0}(r_1) - 2W(r_1) \\
 &= M(\tau) + P_\tau(r_2) + P_{\sigma_0}(r_2) - 2W(r_2) + P_\sigma(r_1) + P_{\sigma_0}(r_1) - 2W(r_1) \\
 &= M(\tau) + P_{\sigma_0}(r_1 + r_2) + P_\sigma(r_1) + P_\tau(r_2) - 2W(r_1 + r_2).
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass P und W nach Definition additiv sind. Es ist auch nicht schwer zu sehen, dass $r_1 + r_2$ eine Verbindungsfläche von σ nach τ ist, wenn man r_1 und r_2 geschickt gewählt hat (s. Abb. 10). Es bleibt zu zeigen, dass $P_{\sigma_0}(r_1 + r_2) = P_\sigma(r_1) + P_\tau(r_2)$ gilt. Denn dann haben wir

$$\begin{aligned}
 M(\sigma) &= M(\tau) + P_{\sigma_0}(r_1 + r_2) + P_\sigma(r_1) + P_\tau(r_2) - 2W(r_1 + r_2) \\
 &= M(\tau) + P_\sigma(r_1 + r_2) + P_\tau(r_1 + r_2) - 2W(r_1 + r_2).
 \end{aligned}$$

Hierfür überlegen wir uns, wie die Fläche $r_1 + r_2$ aussehen kann. Das ist äquivalent dazu, sich zu überlegen, wie das Produkt von zwei Transpositionen aussehen kann. Wir erhalten die drei Fälle: Identität, Doppeltransposition und Dreier-Zykel. Die führen zu vier unterschiedlichen Verbindungsflächen (s. Abb 9). Weil wir Streifen abziehen können, ist nur im Fall des Dreier-Zykels etwas zu zeigen, da es dort ein $x \in \sigma$ gibt mit $x \in r_2$ und $x \notin \sigma_0$. Aus der letzten Bedingung wissen wir dann, dass x ein Randpunkt von r_1 ist und somit noch ein Randpunkt von $r_1 + r_2$. Dieser Randpunkt berandet zwei Quadrate aus r_2 . Sagen wir x liegt auf der Linie α_i , dann berandet nun der Punkt von $(i, \sigma_0(i))$ genau zwei Quadrate von $r_1 + r_2$, wie im folgenden Bild zu sehen ist. Dabei wird x von

dem roten Punkt auf der Linie α_i dargestellt und $(i, \sigma_0(i))$ von dem blauen.



Der Induktionsschritt folgt nun durch Nachrechnen. Sei $\tau \in T_k$ und $\sigma, \sigma' \in T_{k-1}$, so dass sich σ und σ' nur um eine Transposition von τ unterscheiden. Wir definieren

$$M(\tau) := M(\sigma) + P_\sigma(r_1) + P_\tau(r_1) - 2W(r_1)$$

$$M'(\tau) := M(\sigma') + P_{\sigma'}(r_2) + P_\tau(r_2) - 2W(r_2)$$

mit $r_1 \in R(\tau, \sigma)$ und $r_2 \in R(\tau, \sigma')$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M(\tau) &= M(\sigma) + P_\sigma(r_1) + P_\tau(r_1) - 2W(r_1) \\ &= M(\sigma') + P_\sigma(r_2 - r_1) + P_{\sigma'}(r_2 - r_1) - 2W(r_2 - r_1) + P_\sigma(r_1) + P_\tau(r_1) - 2W(r_1) \\ &= M(\sigma') + P_\sigma(r_2) + P_\tau(r_2) - 2W(r_2) = M'(\tau) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.8. Wir hatten im vorangegangenen Beweis gesehen, dass ein Verbindungsrechteck $r \in R(\sigma, \tau)$ eindeutig bis auf die Addition von vertikalen und horizontalen Streifen ist. Wenn wir aus Γ nun die Untergruppe, die von allen horizontalen und vertikalen Streifen erzeugt wird, herraus teilen, erhalten wir eine Abbildung zwischen Verbindungsflächen.

$$* : F(\sigma, \tau) \times F(\tau, \nu) \longrightarrow F(\sigma, \nu)$$

$$([r], [r']) \mapsto [r + r']$$

Es ist dann so zu verstehen, dass es einen Repräsentanten gibt, dessen Rand die gewünschte Eigenschaft hat.

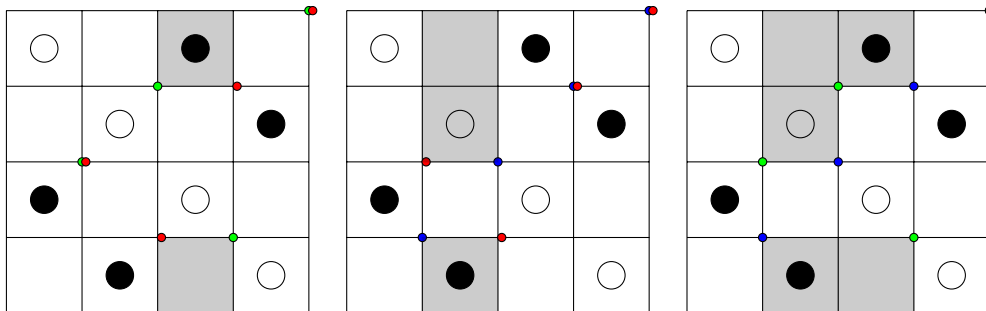


Abbildung 10: σ ist grün dargestellt und τ in rot. ν entspricht blau. Links ist ein Verbindungsrechteck $r \in R(\sigma, \tau)$ und in der Mitte ist eins $r' \in R(\tau, \nu)$. Ganz rechts sehen wir die Verbindungsfläche $r + r' \in F(\sigma, \nu)$.

Satz 2.9. Die Abbildung ∂ ist ein Differential. Also $\partial^2 = 0$.

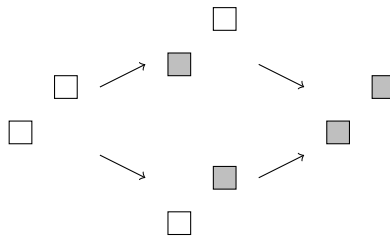
Beweis. Wir müssen zeigen, dass

$$\partial \circ \partial(\sigma) = \sum_{\tau \in S_n} \sum_{p \in F(\sigma, \tau)} N(p) \cdot \tau = 0.$$

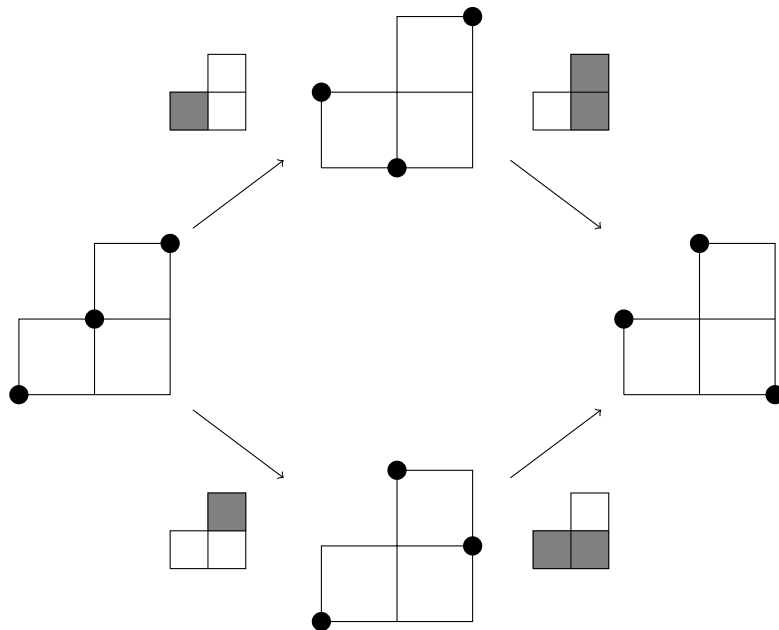
gilt. $N(p)$ ist dann die Anzahl, auf wie viele Weisen sich p als Summe von zwei leeren Rechtecken schreiben lässt. Also

$$N(p) = \#\{(r, r') \in R^\circ(\sigma, v) \times R^\circ(v, \tau) \mid r + r' = p, v \in S_n\}$$

Wir hatten in Abbildung 9 schon gesehen, wie die Flächen aussehen können. Nun wollen wir zeigen, dass jeder Summand in gerader Anzahl auftaucht. Bei den Doppeltranspositionen erhalten wir zweimal denselben Summanden, indem wir die Transposition in unterschiedlicher Reihenfolge anwenden.



Für die Dreier-Zyklen finden wir auch zwei Möglichkeiten, die Fläche zu zerlegen. So taucht auch hier jeder Summand doppelt auf, wie im Bild unten dargestellt.



Der Fall, dass wir die Identität erhalten, tritt auf, wenn wir von σ nach τ und von τ zurück nach σ gehen. Damit die Verbindungsrechtecke jeweils leer sind, können sich

σ und τ nur um eine Transposition der Form $(i \ i + 1)$ unterscheiden. Das entspricht vertikalen oder horizontalen Streifen der Breite bzw. Höhe eins. Es gibt genau $2n$ solcher Streifen. Für jeden Streifen gibt es nach dem vorigen Argument ein eindeutiges τ und genau eine Zerlegung in $r_1 + r_2$. Jedes O_i liegt in genau einem horizontalen und einem vertikalen Streifen, sodass diese beiden Streifen Summanden mit demselben Koeffizienten liefern und diese sich ebenfalls wegheben. \square

Lemma 2.10. $\partial : C(G_L)_d \longrightarrow C(G_L)_{d-1}$ ist wohldefiniert.

Beweis. Da ∂ linear definiert ist, müssen wir die Aussage nur für die Erzeuger zeigen. Sei $U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau$ ein Summand im Differential von σ und $M(\sigma) = d$. Für das Verbindungsrechteck $r \in R(\sigma, \tau)$ gilt dann $r^\circ \cap \sigma = \emptyset$ und damit $P'_\sigma(r) = 0$. Wir erhalten aus der Maslov-Gleichung:

$$M(\sigma) = 1 + M(\tau) - 2W(r).$$

Andererseits gilt:

$$M(U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau) = M(\tau) - 2 \sum_{i=0}^n O_i(r) = M(\sigma) - 1 + 2W(r) - 2 \sum_{i=0}^n O_i(r).$$

Doch gibt $\sum_{i=0}^n O_i(r)$ genau die Anzahl der weißen Punkte im Rechteck r wieder, also genau $W(r)$. Und somit bleibt nur noch

$$M(U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau) = M(\sigma) - 1 = d - 1.$$

\square

Satz 2.11. ∂ bewahrt die Alexander-Filtrierung, also die Abbildung $\partial : F_s C \longrightarrow F_s C$ ist wohldefiniert.

Beweis. Sei $U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau$ ein Summand von $\partial\sigma$ mit Verbindungsrechteck $r \in R(\sigma, \tau)$, dann folgt die Aussage direkt aus der Gleichung

$$A(\sigma) - A(\tau) = \sum_i (X_i(r) - O_i(r)) \cdot g(i),$$

da nun gilt:

$$A(\sigma) = \sum_i X_i(r) \cdot g(i) + A\left(U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau\right).$$

Wir zeigen also die Gleichung. Die Differenz von $A(\sigma) - A(\tau)$ hängt nur von den Windungszahlen der zwei Punkte ab, in denen sich σ und τ unterscheiden. Dann wählen wir ein Verbindungsrechteck $r \in R(\sigma, \tau)$ und betrachten den einfachsten Fall, dass genau ein schwarzer Punkt im Rechteck r ist. Ganz analog wie im Beweis von Lemma 2.6 erhalten wir dann vier Möglichkeiten und in allen Fällen ist die negative Windungszahl von τ um eins geringer als die von σ . Die allgemeine Formel ist eine wiederholte Anwendung dieses Argumentes. \square

3 Algebraische Eigenschaften von $C(G_L)$

Der Aufbau dieses Abschnitts und die Darstellung der Beweise halten sich weitestgehend an [7].

3.1 \mathbb{Q}^l -Filtrierung

Definition 3.1. Wir versehen \mathbb{Q}^l mit seiner partiellen Ordnung. Sei R der Polynomring $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$ und $g : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Q}^l$ eine Abbildung. Eine \mathbb{Q}^l -Filtrierung eines R -Moduls M ist eine Familie von Untermoduln $\{F_s M\}_{s \in \mathbb{Q}^l}$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $F_s M \subset F_t M$ für $s \leq t$,
2. Multiplikation mit U_i induziert eine Abbildung $U_i : F_s M \rightarrow F_{s-g(i)} M$,
3. $F_s M = M$ für ein s groß genug.

Wir sprechen im Folgenden nur noch von einem filtrierten R -Modul und meinen damit stets eine \mathbb{Q}^l -Filtrierung im obigen Sinne. Wie üblich können wir alle Abbildungen definieren, die diese Struktur bewahren.

Definition 3.2. Seien M und N zwei \mathbb{Q}^l -filtrierte R -Module. Ein R -Modul Homomorphismus $\Phi : M \rightarrow N$ heißt filtriert, wenn $\Phi(F_s M) \subset F_s N$ für alle $s \in \mathbb{Q}^l$ gilt.

Ein filtrierter Kettenkomplex (C, ∂) ist ein filtrierter und graduierter R -Modul zusammen mit einem filtrierten Endomorphismus ∂ , der die Graduierung um eins verringert. Seien nun zwei filtrierte Kettenkomplexe (A, ∂_a) und (B, ∂_b) gegeben. Eine filtrierte Kettenabbildung $\Phi : A \rightarrow B$ ist eine filtrierte Abbildung, die die Graduierung bewahrt. Zwei filtrierte Kettenabbildungen $\Phi_1, \Phi_2 : A \rightarrow B$ sind filtriert kettenhomotop, wenn es eine filtrierte Abbildung $H : A \rightarrow B$ gibt, die die Graduierung um eins erhöht und

$$H \circ \partial_a + \partial_b \circ H = \Phi_1 - \Phi_2$$

gilt. Analog sagen wir, zwei filtrierte Kettenkomplexe sind filtriert kettenhomotopie-äquivalent, wenn es eine filtrierte Kettenabbildung gibt $\Phi : A \rightarrow B$ und $\Psi : B \rightarrow A$, sodass $\Psi \circ \Phi$ filtriert kettenhomotop zur Identität von A und $\Phi \circ \Psi$ filtriert kettenhomotop zur Identität von B ist.

Definition 3.3. Sei (C, ∂) ein filtrierter Kettenkomplex. Wir bezeichnen mit $gr_s(C)$ den Quotienten von $F_s C$ nach dem Untermodul, der von allen $F_t C$ mit $t < s$ erzeugt wird. Der assoziierte graduierte Modul $gr(C)$ ist dann definiert als

$$gr(C) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Q}^l} gr_s(C).$$

Bemerkung 3.4. Wenn $s \in \mathbb{Q}^l$ nur diskrete Werte annimmt, dann ist $gr_s(C) = F_s C / F_t C$ für ein geeignetes $t \in \mathbb{Q}^l$ mit $t < s$.

Definition 3.5. Zwei filtrierte Kettenkomplexe A, B sind *filtriert quasi-isomorph*, wenn es eine filtrierte Kettenabbildung $\Phi : A \rightarrow B$ gibt, sodass Φ einen Isomorphismus zwischen $H_*(F_s A)$ und $H_*(F_s B)$ für alle $s \in \mathbb{Q}^l$ induziert.

Wir können den Abschnitt 2.2 zu folgendem Satz zusammenfassen.

Satz 3.6. *Sei G_L ein Gitterdiagramm. Der Komplex $C(G_L)$ mit M als Graduierung, A als Filtrierung und ∂ als Endomorphismus bildet einen \mathbb{Q}^l -filtrierten Kettenkomplex.*

3.2 Die Komplexe $\widehat{CL}(L)$ und $\widetilde{CL}(G_L)$

In diesem Abschnitt verfolgen wir zwei Ziele. Als erstes wollen wir die Homologie des Komplexes $C(G_L)$ besser verstehen. Danach vereinfachen wir $C(G_L)$ insofern, dass wir am Ende einen \mathbb{F}_2 -Vektorraum erhalten. Der Ausgangspunkt für beide Untersuchungen ist das folgende Lemma.

Lemma 3.7. *Wenn O_i und O_j zu derselben Komponente der Verschlingung gehören, dann ist Multiplikation mit U_i kettenhomotop zur Multiplikation mit U_j .*

Beweis. Da die Komposition von filtrierten Kettenabbildungen, wieder eine filtrierte Kettenabbildung ist, reicht es, wenn wir nur den Fall betrachten, dass ein X_k existiert, das in derselben Zeile von O_i und in derselben Spalte von O_j liegt. Wir definieren die Abbildung

$$H : C(G_L) \rightarrow C(G_L)$$

über die Formel

$$H(\sigma) = \sum_{\tau} \sum_{\substack{r \in R^\circ(\sigma, \tau) \\ X_k \in r}} U_1^{O_1(r)} \dots U_n^{O_n(r)} \cdot \tau. \quad (3.1)$$

Anschaulich ist H wie ∂ definiert, doch zählt es nur die Rechtecke, die X_k enthalten. Nun ist die Behauptung, dass

$$\partial \circ H + H \circ \partial = U_i - U_j$$

gilt. Wie bereits erwähnt, verhält sich H genau wie ∂ , sodass die meisten Summanden von $H \circ \partial$ bzw. $\partial \circ H$ analog wie im Beweis von Satz 2.9 wegfallen. Übrig bleiben nur die Streifen, die X_k enthalten. Somit bleiben noch der Summand $U_j \sigma$ durch den vertikalen Streifen und $U_i \sigma$ durch den horizontalen Streifen übrig. Dass H die Filtrierung beachtet, folgt auch unmittelbar aus Satz 2.11. Bei der Graduierung ist zu beachten, dass H und ∂ die Graduierung um je eins verringern und Multiplikation mit U_i bzw. U_j um zwei. \square

Korollar 3.8. *Die Homologie des filtrierten Kettenkomplexes $C(G_L)$ hängt nicht von der Nummerierung der Menge \mathbb{W} ab.*

Beweis. Verschiedene Nummerierungen können durch Kompositionen von Abbildungen aus Lemma 3.7 miteinander verbunden werden. \square

Dies hat weitere Vorteile für die Berechnung der Homologie, da wir jetzt nur noch einen Repräsentanten für jede Komponente der Verschlingung nehmen müssen. Sei im Folgenden G_L ein Gitterdiagramm einer l -komponentigen Verschlingung L . Wir nummerieren die Punkte $\{O_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}}$ so durch, dass die Punkte O_1, \dots, O_l zu jeweils einer Komponente von L gehören. Es gilt $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_l] \subset \mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$ und somit können wir $C(G_L)$ als $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_l]$ -Modul auffassen.

Definition 3.9. Der filtrierte Komplex $C(G_L)$ als $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_l]$ -Modul aufgefasst wird mit $C(L)$ bezeichnet.

Man beachte, dass in der Bezeichnung $C(L)$ nicht mehr das Gitterdiagramm G_L steckt, welches für die Konstruktion verwendet wurde. Doch Manolescu, Ozsváth, Szabó und Thurston konnten in [7] zeigen:

Satz 3.10. *Sei L eine Verschlingung, dann hängt $C(L)$ bis auf Quasi-Isomorphie nicht von der Wahl des Gitterdiagramms ab.*

Wir können noch weitere rein algebraische Manipulationen durchführen. Betrachten wir $C(G_L)$ wieder als $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_l]$ -Modul. Wir erhalten einen \mathbb{F}_2 -Modul, indem wir alle $U_i = 0$ für $i = 1, \dots, l$ setzen.

Definition 3.11. Den Komplex $C(L)/\{U_i = 0\}_{i=1, \dots, l}$ bezeichnen wir mit $\widehat{C}(L)$. Den assoziierten graduierten Modul $gr(\widehat{C}(L))$ nennen wir $\widehat{CL}(L)$.

Definition 3.12 (Heegaard-Floer-Knoten-Homologie). Sei L eine Verschlingung. Die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie $\widehat{HL}(L)$ ist die Homologie des Komplexes $\widehat{CL}(L)$.

Bemerkung 3.13. Man beachte, dass in der Literatur $\widehat{HL}(L)$ oft mit $\widehat{HFK}(L)$ bezeichnet wird. Wir halten uns an die Notation aus [7].

Lemma 3.14. $\widehat{HL}(L)$ ist ein endlich dimensionaler \mathbb{F}_2 -Vektorraum.

Beweis. Zunächst ist $\widehat{CL}(L)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$ -Modul. Aus Lemma 3.7 folgt nun, da wir $U_1 = \dots = U_l = 0$ gesetzt haben, dass Multiplikation mit einem beliebigen U_i nullhomotop ist. Somit verschwinden alle Elemente in der Homologie, die einen solchen Koeffizienten haben. Damit ist $\widehat{HL}(L)$ ein endlich dimensionaler \mathbb{F}_2 -Vektorraum. \square

Nun kann man sich die Frage stellen, was passiert, wenn wir in $C(G_L)$ alle $U_1 = \dots = U_n = 0$ setzen und somit $C(G_L)$ zu einem endlichen \mathbb{F}_2 -Vektorraum machen.

Definition 3.15. Wir bezeichnen mit $\widetilde{C}(G_L)$ den Komplex $C(G_L)/\{U_i = 0\}_{i=1, \dots, n}$ und den assoziierten graduierten Modul mit $\widetilde{CL}(G_L)$. Außerdem schreiben wir für die Homologie dieses Komplexes $\widetilde{HL}(G_L)$.

Der Unterschied zwischen $\widehat{CL}(L)$ und $\widetilde{CL}(G_L)$ liegt darin, dass wir im ersten Fall für jede Komponente unserer Verschlingung nur ein $U_i = 0$ gesetzt haben und im zweiten Komplex alle. Wie bereits erwähnt hat $\widetilde{CL}(G_L)$ den Vorteil, ein endlich dimensionaler Vektorraum zu sein. Dafür ist $\widetilde{CL}(G_L)$ keine Verschlingungs-Invariante.

Lemma 3.16. *Das Differential von $\widetilde{CL}(G_L)$ ist gegeben durch:*

$$\tilde{\partial}(\sigma) = \sum_{\tau \in S_n} \sum_{r \in R(\sigma, \tau)} \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad P'_\sigma(r) = W(r) = B(r) = 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \end{array} \right\} \cdot \tau.$$

Dabei bedeutet $P'_\sigma(r) = 0$ nichts anderes, als dass r leer ist. Die Bedingung $W(r) = B(r) = 0$ kann man auch auffassen, dass r frei von weißen und schwarzen Punkten ist.

Beweis. Die Bedingung, dass keine weißen Punkte im Rechteck r sein dürfen, folgt direkt daraus, dass wir $U_1 = \dots = U_n = 0$ gesetzt haben. Da wir den assoziiert graduiereten Modul betrachten, darf sich die Alexander-Filtrierung nicht ändern. Da keine weißen Punkte in r sein dürfen, ändert sich nach der Formel aus dem Beweis von Lemma 2.6 die Alexander-Filtrierung genau dann, wenn r einen schwarzen Punkt enthält. \square

Es gilt folgender rein algebraische Zusammenhang zwischen den beiden Komplexen $\widehat{CL}(L)$ und $\widetilde{CL}(G_L)$.

Lemma 3.17. *Sei C ein filtrierter Kettenkomplex mit $\mathbb{F}_2[U_1, \dots, U_n]$ -Koeffizienten, so dass Multiplikation mit U_i die Graduierung um zwei und die Filtrierung um eins verringert und so dass Multiplikation mit U_i kettenhomotop zur Multiplikation mit U_j ist für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt:*

$$H_* \left(C / \{U_i = 0\}_{\{i=1, \dots, n\}} \right) \cong H_* (C/U_1) \otimes V^{\otimes(n-1)},$$

wobei V der Vektorraum aus zwei Erzeugern ist. Der erste Erzeuger hat Graduierung und Filtrierung 0 und der zweite -1 .

Beweis. Um die Notation einfach zu halten, zeigen wir nur den Fall $n = 2$. Nehmen wir den Abbildungskegel² $M(U_1)$ der Kettenabbildung $U_1 : C \rightarrow C$ und betrachten die Projektionsabbildung π von $M(U_1)$ nach C/U_1 angewandt auf den zweiten Summanden. Wir wollen zunächst zeigen, dass dies einen Isomorphismus zwischen $H_*(M(U_1))$ und $H_*(C/U_1)$ induziert. Durch den Abbildungskegel erhalten wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen:

$$0 \rightarrow C \rightarrow M(U_1) \rightarrow C \rightarrow 0$$

mit der langen exakten Sequenz der Homologie

$$\dots \rightarrow H_n(C) \xrightarrow{U_1} H_n(C) \xrightarrow{i} H_n(M(U_1)) \rightarrow H_{n-1}(C) \xrightarrow{U_1} H_{n-1}(C) \rightarrow \dots$$

²In Abschnitt 6.1 wird der Abbildungskegel beschrieben.

Andererseits haben wir auch eine kurze exakte Sequenz gegeben durch

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{U_1} C \longrightarrow C/U_1 \longrightarrow 0$$

mit der dazugehörigen langen exakten Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{U_1} H_n(C) \xrightarrow{\pi} H_n(C/U_1) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(C) \xrightarrow{U_1} H_{n-1}(C) \longrightarrow \dots$$

Wir können nun beide lange exakten Sequenzen in ein großes kommutatives Leiterdiagramm zeichnen.

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{U_1} & H_n(C) & \xrightarrow{i} & H_n(M(U_1)) & \xrightarrow{p} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{U_1} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & H_n(C) & \xrightarrow{U_1} & H_n(C) & \xrightarrow{\pi} & H_n(C/U_1) & \xrightarrow{\partial_E} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{U_1} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Zunächst überlegt man sich, dass es wirklich kommutativ ist. Dann folgt mit dem Fünferlemma sofort, dass $H_*(M(U_1))$ isomorph ist zu $H_*(C/U_1)$. Mit demselben Argument erhalten wir einen Quasi-Isomorphismus zwischen dem Abbildungskegel $M(U_2)$ der Abbildung $U_2 : C/U_1 \longrightarrow C/U_1$ und dem Komplex $C/(U_1, U_2)$. Da aber U_2 kettenhomotop zu U_1 ist, ist $M(U_2)$ quasi-isomorph zum Abbildungskegel der Nullabbildung, also der direkten Summe. Und somit haben wir einen Quasi-Isomorphismus:

$$C/U_1 \otimes V \cong C/U_1 \oplus C/U_1 \cong C/(U_1, U_2).$$

Es ist nicht schwer, den Beweis zu einem Induktionsschritt zu erweitern. Nun überlegen wir uns, wie Graduierung und Filtrierung aussehen müssen. Multiplikation mit U_i hat die Graduierung um zwei und die Filtrierung um eins verringert. Also ist U_i eine Kettenabbildung der Form $F_s C_d \longrightarrow F_{s-1} C_{d-2}$. Damit das Differential des Abbildungskegels wohldefiniert ist, gilt $F_s M(U_i) = F_s C_d \oplus F_{s-1} C_{d-1}$ und somit hat V einen Erzeuger mit Graduierung und Filtrierung 0 und einen Erzeuger mit Graduierung und Filtrierung -1 . \square

Damit erhalten wir für unsere Verschlingung und den dazugehörigen Kettenkomplex

Satz 3.18. *Sei V_i ein zwei dimensionaler \mathbb{F}_2 -Vektorraum mit Bigraduierung in $(0, 0)$ und $(-1, -e_i)$. Dann gilt:*

$$\widetilde{HL}(G_L) = \widehat{HL}(L) \bigotimes_{i=1}^l V_i^{\otimes (n_i-1)}.$$

Beweis. Das folgt aus Lemma 3.17 angewandt auf jede Komponente. \square

4 Topologische Eigenschaften von $\widehat{HL}(L)$

Die Verschlingungsinvariante $\widehat{HL}(L)$ ist eine sogenannte Kategorisierung des Alexander-Polynoms. Mit Kategorisierung ist gemeint, dass die Euler-Charakteristik des filtrierten Kettenkomplexes $C(L)$ das Alexander-Polynom einer Verschlingung L ist. Diese Aussage wollen wir nun genauer formulieren und beweisen. Dazu starten wir mit einem Gitterdiagramm G_L von L mit l Komponenten. Sei $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, dann definieren wir

$$t^{\mathbf{s}} = t_1^{s_1} \cdots t_l^{s_l}.$$

Außerdem bezeichnen wir mit $C_i(\mathbf{s})$ den Spann aller Elemente eines filtrierten Kettenkomplexes C mit Graduierung i und Filtrierung \mathbf{s} .

Definition 4.1 (Euler-Charakteristik). Sei C ein filtrierter Kettenkomplex, dann ist die Euler-Charakteristik durch die Formel

$$\chi(C; t) = \sum_{i, \mathbf{s}} (-1)^i t^{\mathbf{s}} \text{rank } C_i(\mathbf{s})$$

gegeben.

Folgenden Hauptsatz beweisen wir in diesem Abschnitt.

Satz 4.2. *Sei L eine l -komponentige Verschlingung. Dann ist die Euler-Charakteristik von $\widehat{HL}(L)$ das Alexander-Polynom in mehreren Veränderlichen.*

$$\chi(\widehat{HL}(L); t) = \begin{cases} \pm \Delta_L(t) & l = 1 \\ \pm \prod_{i=1}^l (t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) \Delta_L(t) & l > 1 \end{cases}.$$

Das werden wir nicht direkt zeigen, sondern wir werden den Komplex $\widetilde{CL}(G_L)$ dafür betrachten, der ein freier \mathbb{F}_2 -Vektorraum über der Menge \mathbf{S} ist und somit nur $|\mathbf{S}| = n!$ viele Elemente enthält. Den Zusammenhang zwischen den jeweiligen Euler-Charakteristiken der Komplexe liefert uns folgendes Lemma.

Lemma 4.3. *Wir fixieren ein Gitterdiagramm G_L der Verschlingung L . Sei n_i die Anzahl der weißen Punkte der i -ten Komponente. Es gilt:*

$$\prod_i^l ((1 - t_i)^{n_i - 1}) \chi(\widehat{HL}(L)) = \chi(\widetilde{HL}(G_L)) = \chi(\widetilde{CL}(G_L)).$$

Beweis. Wir erinnern an Satz 3.18 und erhalten damit

$$\widehat{HL}(L) \bigotimes_{i=1}^l V_i^{n_i - 1} = \widetilde{HL}(G_L).$$

Dann folgt aus $\chi(V_i; t) = 1 - t_i$ und bekannten Rechenregeln für die Euler-Charakteristik die Behauptung. \square

Satz 4.4. Sei L eine Verschlingung und G_L ein Gitterdiagramm von L . Sei n_i die Anzahl der weißen Punkte der i -ten Komponente, dann gilt:

$$\chi(\widetilde{CL}(G_L); t) = \begin{cases} \pm t^k (1-t)^{n-1} \Delta_L(t) & l = 1 \\ \pm \prod_{i=1}^l t_i^{k_i} (1-t_i)^{n_i} \Delta_L(t) & l > 1 \end{cases}.$$

Beweis. Man beachte, dass jeder Erzeuger genau einmal in der Summe auftaucht und die Erzeuger Permutationen aus S_n sind. Außerdem ist die Alexander-Filtrierung bis auf einen konstanten Verschiebungsfaktor die Summe über die negative Windungszahl. Für die Maslov-Graduierung von σ gilt $(-1)^{M(\sigma)} = \text{sign}(\sigma)$ bis auf ein einmalig festzulegendes Vorzeichen, wie man an der Maslov-Gleichung 2.2 leicht sieht. (W und P'_σ tauchen nur gerade in der Formel auf). Die Euler-Charakteristik von $\widetilde{CL}(G_L)$ entspricht dann bis auf das Vorzeichen und einen konstanten Faktor t^a der Leibnizformel für die Determinante. Die Behauptung folgt dann aus dem nächsten Satz. \square

Satz 4.5. Sei G_L ein Gitterdiagramm der Größe n . Die Minesweeper-Matrix $M(G_L) := (a_{i,j})_{i,j \in \{0, \dots, n-1\}}$ ist eine $n \times n$ -Matrix definiert durch

$$a_{i,j} = t_1^{-w_1(i,j)} \dots t_l^{-w_l(i,j)},$$

wobei $w_k(i,j)$ die Windungszahl im Punkt (i,j) der k -ten Komponente bezeichnet. Für diese Matrix gilt:

$$\det(M(G_L)) = \begin{cases} \pm t^k (1-t)^{n-1} \Delta_L(t) & l = 1 \\ \pm \prod_{i=1}^l t_i^{k_i} (1-t_i)^{n_i} \Delta_L(t) & l > 1 \end{cases}.$$

Beweis. Wir werden die Aussage nur für den Fall $l = 1$, also einem Knoten zeigen, um ein paar technischen Schwierigkeiten beim Fox-Kalkül aus dem Weg zu gehen. Betrachten wir ein Gitterdiagramm G_L und die dazugehörige Minesweeper-Matrix $M(G_L)$. Wenn wir Abbildung 8 betrachten, dann erhalten wir für den Kleeblattknoten die Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & t & t & 1 \\ 1 & t & t & 1 & t^{-1} \\ 1 & t & 1 & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & t^{-1} & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ziehen wir von jeder Spalte, außer der ersten, die vorherige linke Spalte ab. Dies ändert den Wert der Determinante nicht. Die Windungszahl ändert sich von Spalte zu Spalte nur um ± 1 und nur, wenn ein vertikaler Strang dazwischen liegt. Wir erhalten eine neue Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{0,1} & \dots & a'_{0,n-1} \\ 1 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a'_{n-2,1} & \dots & a'_{n-2,n-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Einträgen

$$a'_{i,j} = t^{-w(i,j)} - t^{-w(i,j-1)} = \begin{cases} -t^{-w(i,j-1)}(1 - t^{\pm 1}) \\ 0 \end{cases}.$$

Wenn also ein Strang zwischen zwei Spalten verläuft, ist die Spalte danach durch den Faktor $(1 - t)$ bzw. $(1 - t^{-1})$ teilbar. Weil die Determinante eine Multilinearform ist, können wir diese $n - 1$ Faktoren zusammen mit dem negativen Vorzeichen herausziehen. Damit bleibt als Eintrag die negative Windungszahl der vorangegangenen Spalte oder eine 0. Des Weiteren steht in der letzten Zeile nur in der ersten Spalte eine 1. Der Rest sind Nullen. Also können wir nach der letzten Zeile entwickeln und somit die erste Spalte und letzte Zeile streichen, da dies nur das Vorzeichen der Determinante beeinflusst. Hier nochmal am Beispiel des Kleeblattknoten.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & t & t & t & 1 \\ 1 & t & t & 1 & t^{-1} \\ 1 & t & 1 & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & t^{-1} & t^{-1} & t^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & t-1 & 0 & 0 & 1-t \\ 1 & t-1 & 0 & 1-t & t^{-1}-1 \\ 1 & t-1 & 1-t & t^{-1}-1 & 0 \\ 1 & 0 & t^{-1}-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \pm \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 1-t \\ t-1 & 0 & 1-t & t^{-1}-1 \\ t-1 & 1-t & t^{-1}-1 & 0 \\ 0 & t^{-1}-1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \pm t^{-4}(1-t)^4 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nähern wir uns dieser Matrix von einer anderen Seite. In Abschnitt 1.3 hatten wir die Neuwirth-Präsentation von $\pi(S^3 \setminus L)$ vorgestellt, wo die Erzeuger in Eins-zu-Eins-Korrespondenz zu den vertikalen Strängen stehen. In der Appendix, in Abschnitt 6.4 und Folgenden, ist eine Methode angegeben, wie man mit einer Präsentation und dem Fox-Kalkül das Alexander-Polynom berechnet. Das besondere an der Neuwirth-Präsentation ist, dass in jeder Relation die Erzeuger nur positiv auftauchen und jeder Index höchstens einmal vorkommt. Deren Ableitungen im Fox-Kalkül sind besonders einfach zu brechnen. Sollte x_i in einer Relation $r_i = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ auftauchen, dann ist die Ableitung durch

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(r_i) = x_{i_1} \cdots x_{i_{k'}}$$

gegeben, wobei i'_k der größte Index ist, der strikt kleiner als i ist. Anschaulich bleiben alle vertikalen Stränge im Wort übrig, die vor x_i kommen. Schicken wir dieses abgeleitete Wort auf die Abelisierung, dann bleibt auch hier nur t hoch der negativen Windungszahl des vorangegangenen linken Punktes übrig. Das liegt daran, dass wir, wie im Text unter der Abbildung 8 beschrieben, die Windungszahl eines Punktes so bestimmen können. Für den Kleeblatt-Knoten erhalten wir:

$$\pi(S^3 \setminus \mathfrak{B}_1) = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 | x_0 x_3 = e, x_0 x_2 x_3 x_4 = e, x_0 x_1 x_2 x_4 = e, x_1 x_4 = e, \rangle$$

und damit die Matrix

$$JG = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 & 0 \\ 1 & 0 & x_0 & x_0x_2 & x_0x_2x_3 \\ 1 & x_0 & x_0x_1 & 0 & x_0x_1x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$JG^\Psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t & 1 & t^{-1} \\ 1 & t & 1 & 0 & t^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Da wir $l = 1$ angenommen haben, können wir Satz 6.23 verwenden, um die letzte Spalte zu streichen. Wir erhalten genau die gleiche Matrix wie oben. Die Determinante dieser Matrix ergibt nach dem Fox-Kalkül das Alexander-Polynom Δ_L der Verschlingung L . Somit ist die Determinante der Minesweeper-Matrix ebenfalls das Alexander-Polynom Δ_L mit dem erwarteten Korrekturfaktor. \square

Satz 4.6. *Sei L eine orientierte Verschlingung und L^- die Verschlingung, die wir erhalten, indem wir die Orientierung von allen Komponenten ändern. Dann sind $\widehat{HL}(L)$ und $\widehat{HL}(L^-)$ isomorph.*

Beweis. Wir fixieren ein Gitterdiagramm G_L von L . Betrachten wir nun das Diagramm G_{L^-} , das wir erhalten, wenn wir in G_L die Rolle von den x und y Koordinaten tauschen. Also eine Spiegelung an der Gerade $x = y$ durchführen. Das soll heißen, wenn die Lage eines weißen Punktes (i, j) in G_L ist, finden wir diesen Punkt in (j, i) in G_{L^-} wieder. Dies ist ein Diagramm von L^- , denn die Spiegelung bewirkt, dass alle horizontalen Stränge nun vertikal verlaufen und umgekehrt. Damit vertauschen wir auch alle Kreuzungen. Wir haben den Knoten zweimal gespiegelt. Schauen wir nun auf die Orientierung. Ein schwarzer und weißer Punkt, die vorher in einer Spalte waren, liegen nun in einer Zeile. Somit dreht sich die Orientierung. Wir bezeichnen mit \mathbf{S} die Erzeuger von G_L und mit \mathbf{S}' die Erzeuger von G_{L^-} , dann ist der Isomorphismus durch

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{S} &\longrightarrow \mathbf{S}' \\ \sigma &\longmapsto \sigma^{-1} \end{aligned}$$

gegeben. Hier meint σ^{-1} den Graph des inversen Elementes von $\sigma \in S_n$. Dass dieser Isomorphismus alle gewünschten Eigenschaften hat, also Maslov-Graduierung und Alexander-Filtrierung bewahrt, ist eine Aussage aus der Algebra über die S_n . Nehmen wir als Beispiel das Element $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ dann ist das Inverse Element gegeben durch

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nun ist Φ sogar ein Isomorphismus von Kettenkomplexen. \square

Wir können uns die Frage stellen, ob die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie mehr Informationen enthält, als das Alexander-Polynom selber. Dahinter steckt die Frage, ob sich der Mehraufwand, den wir durch die Berechnung des Komplexes haben, lohnt. Dass sich der Mehraufwand lohnt, konnten Osvath und Szabo in [8] zeigen, wo sie folgenden Satz beweisen.

Satz 4.7. *Sei K ein Knoten. Dann gilt*

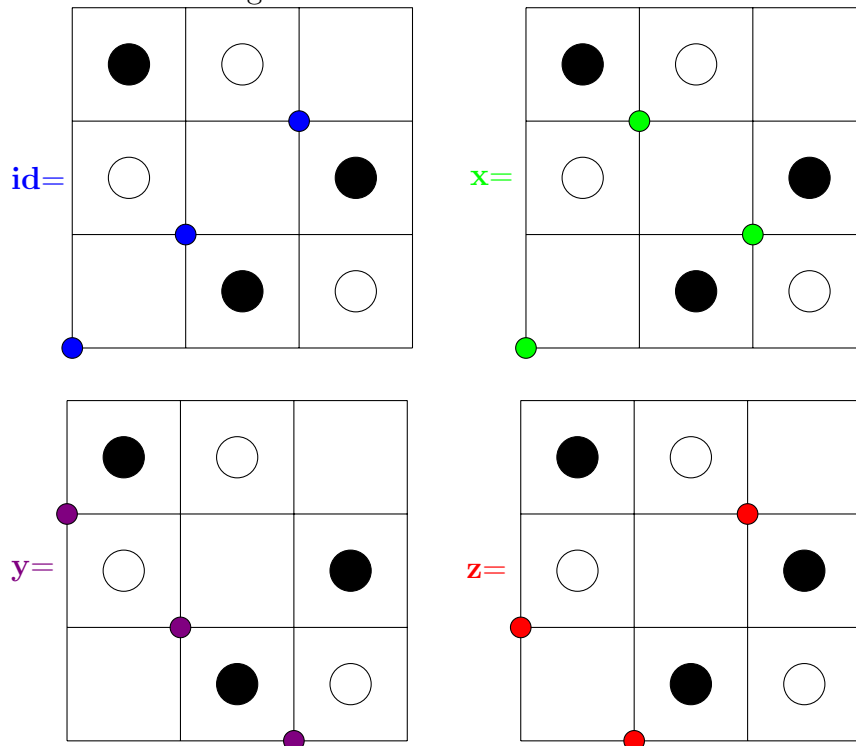
$$g(K) = \max\{s \in \mathbb{Z} \mid H_*(gr_s(C(L))) \neq 0\},$$

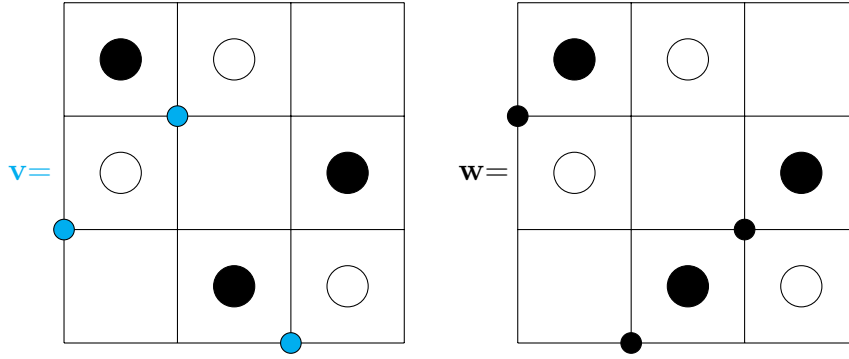
wobei $g(K)$ das Seifert-Geschlecht des Knoten bezeichnet.

Also ist die Heegaard-Floer-Knoten-Homologie in der Lage, den Unknoten zu erkennen. Die kombinatorische Beschreibung liefert uns dazu einen korrekten Computer-Algorithmus, der bei einem gegeben Diagramm in endlicher Zeit entscheidet, ob es sich um ein Diagramm des Unknoten handelt. Leider ist die Laufzeit exponentiell, da wir alle Erzeuger des Komplexes durchgehen müssen. Wenn das Diagramm die Größe n hat, dann sind es $n!$ viele Erzeuger. Somit bleibt die interessante Frage offen, ob man die Beschreibung soweit vereinfachen kann, dass man eine polynomiale Laufzeit erhält.

5 Ein Beispiel

Hier ein weiteres Beispiel, das nicht zu trivial ist, aber noch mit der Hand berechenbar. Wir betrachten ein Gitterdiagramm G des Unknotens 0_1 . Wir bezeichnen die Erzeuger von \mathbf{S} wie unten dargestellt.





Die Permutation σ_0 ist hier mit \mathbf{v} bezeichnet und hat nach Konvention $M(\mathbf{v}) = -2$. Daraus können wir für die restlichen Erzeuger die Maslov-Graduierung bestimmen. Wir erhalten folgende Tabelle:

\mathbf{S}	M	A	∂
\mathbf{w}	0	0	$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$
\mathbf{id}	0	-1	$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$
\mathbf{x}	-1	-1	$U_1 \mathbf{id} + U_2 \mathbf{id} + U_1 \mathbf{w} + U_2 \mathbf{w}$
\mathbf{y}	-1	-1	$U_2 \mathbf{id} + U_3 \mathbf{id} + U_2 \mathbf{w} + U_3 \mathbf{w}$
\mathbf{z}	-1	-1	$U_1 \mathbf{id} + U_3 \mathbf{id} + U_1 \mathbf{w} + U_3 \mathbf{w}$
\mathbf{v}	-2	-2	$U_3 \mathbf{x} + U_2 \mathbf{y} + U_1 \mathbf{z}$

Also haben wir

$$\ker \partial = \langle \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{id} + \mathbf{w} \rangle.$$

Weil $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \in \text{im } \partial$ gilt, ist die Homologie zyklisch von $\mathbf{id} + \mathbf{w}$ erzeugt. Außerdem folgt aus

$$U_1 \mathbf{id} + U_2 \mathbf{id} + U_1 \mathbf{w} + U_2 \mathbf{w} = U_1(\mathbf{id} + \mathbf{w}) + U_2(\mathbf{id} + \mathbf{w}) \in \text{im } \partial,$$

dass wir in der Homologie die Relation $U_1(\mathbf{id} + \mathbf{x}) = U_2(\mathbf{id} + \mathbf{w})$ erhalten. Damit ist die Multiplikation mit U_1 dasselbe wie die Multiplikation mit U_2 . Analoges gilt auch für U_3 . Dies war nach Lemma 3.7 zu erwarten. Wir haben also

$$H(C(L)) = \ker \partial / \text{im } \partial = \mathbb{F}_2[U_1].$$

Setzen wir $U_1 = 0$ und betrachten den assoziierten graduierten Modul, dann erhalten wir

$$\widehat{HL}(L) = \mathbb{F}_2,$$

wobei \mathbf{w} der Erzeuger ist. Wollen wir nun $\widetilde{HL}(G_L)$ bestimmen, dann erhalten wir die Differentiale:

$$\begin{aligned} \tilde{\partial} \mathbf{id} &= \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} \\ \tilde{\partial} \mathbf{x} &= \tilde{\partial} \mathbf{y} = \tilde{\partial} \mathbf{z} = \tilde{\partial} \mathbf{v} = \tilde{\partial} \mathbf{w} = 0. \end{aligned}$$

Da es sich nun um \mathbb{F}_2 -Vektorräume handelt, können wir die Homologie leicht mit Hilfe der Dimensionsformel berechnen. So haben \mathbf{w} als Erzeuger der Homologie in Alexander-Filtrierung 0. Für Alexander-Filtrierung -1 haben wir die drei Erzeuger $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, aber da

wir das Bild $\widetilde{\text{id}}$ noch herrausteilen, erhalten wir einen zweidimensionalen Vektorraum. Insgesamt haben wir

$$\widetilde{HL}(G_L) = \mathbb{F}_{2_{(0,0)}} \oplus \mathbb{F}_{2_{(-1,-1)}} \oplus \mathbb{F}_{2_{(-1,-1)}} \oplus \mathbb{F}_{2_{(-2,-2)}}.$$

Kommen wir nochmal zurück zu $\widehat{HL}(L)$. Dort ist der Erzeuger \mathbf{w} . Also haben wir $\widehat{HL}(L) = \mathbb{F}_{2_{(0,0)}}$ und somit

$$\widetilde{HL}(G_L) = \mathbb{F}_{2_{(0,0)}} \otimes \left(\mathbb{F}_{2_{(0,0)}} \oplus \mathbb{F}_{2_{(-1,-1)}} \right)^{\otimes 2} = \widehat{HL}(L) \otimes \left(\mathbb{F}_{2_{(0,0)}} \oplus \mathbb{F}_{2_{(-1,-1)}} \right)^{\otimes 2},$$

die Aussage von Satz 3.18. Die nicht triviale Homologie-Gruppe mit der höchsten Alexander-Filtrierung hat Alexander-Filtrierung 0, was uns das richtige Seifert-Geschlecht des Unknoten liefert.

6 Appendix

Hier ein paar Resultate aus der Algebra, die in der Arbeit verwendet wurde, aber keinen rechten Platz fanden, dort für sich behandelt zu werden.

6.1 Abbildungskegel

Gegeben seien zwei Kettenkomplexe (A, ∂_A) und (B, ∂_B) und eine Kettenabbildung $\Phi : A \rightarrow B$. Dann erhalten wir eine induzierte Abbildung $\widetilde{\Phi} : H_*(A) \rightarrow H_*(B)$. Im folgenden Abschnitt erarbeiten wir uns eine Methode, mit deren Hilfe wir die induzierte Abbildung $\widetilde{\Phi}$ besser verstehen wollen.

Definition 6.1. Seien (A, ∂_A) und (B, ∂_B) zwei Kettenkomplexe und $\Phi : A \rightarrow B$ eine Kettenabbildung. Sei $A[1]$ der Kettenkomplex, der aus A entsteht, wenn man die Graduierung um eins verschiebt; also $A[1]_n := A_{n-1}$. Der Abbildungskegel von Φ ist der Kettenkomplex

$$M(\Phi) = A[1] \oplus B$$

zusammen mit dem Differential

$$d = \begin{pmatrix} -\partial_A & 0 \\ \Phi & \partial_B \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass durch die Verschiebung der Graduierung von A das Element $\Phi(a) + \partial_B(b)$ wirklich in B_n liegt für $(a, b) \in A[1] \oplus B$.

Lemma 6.2. *Die Abbildung d ist ein Differential.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der einfachen Rechnung:

$$\begin{pmatrix} -\partial_A & 0 \\ \Phi & \partial_B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_A & 0 \\ \Phi & \partial_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\partial_A)^2 & 0 \\ \Phi(-\partial_A) + \partial_B\Phi & \partial_B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir benutzt, dass ∂_A und ∂_B Differentiale sind und Φ eine Kettenabbildung ist, weshalb

$$\Phi(-\partial_A) + \partial_B\Phi = -\partial_B\Phi + \partial_B\Phi$$

gilt. □

Dass der Abbildungskegel hilft, die Abbildung $\tilde{\Phi}$ besser zu verstehen, sagt nun der folgende Satz.

Satz 6.3. *Sei $\Phi : A \rightarrow B$ eine Kettenabbildung, dann existiert eine lange exakte Sequenz der Form*

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} H_n(B) \xrightarrow{i} H_n(M(\Phi)) \xrightarrow{p} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\tilde{\Phi}} H_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

Beweis. Zunächst einmal gilt offensichtlich $H_n(A[1], -\partial_A) \cong H_{n-1}(A)$. Außerdem haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$E : 0 \longrightarrow (B, \partial_B) \xrightarrow{i} (M(\Phi), d) \xrightarrow{p} (A[1], -\partial_A) \longrightarrow 0 ,$$

die uns die lange exakte Sequenz der Homologie

$$\dots \rightarrow H_n(A) \xrightarrow{\partial_E} H_n(B) \xrightarrow{i} H_n(M(\Phi)) \xrightarrow{p} H_{n-1}(A) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(B) \rightarrow \dots$$

liefert. Nun bleibt zu zeigen, dass der Verbindungshomomorphismus die Abbildung $\tilde{\Phi}$ ist. Betrachten wir dazu das kommutative Diagramm, das einen Ausschnitt der kurzen exakten Sequenz E darstellt.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B_n & \xrightarrow{i} & M(\Phi)_n & \xrightarrow{p} & A_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_{n-1} \\ 0 & \longrightarrow & B_{n-1} & \xrightarrow{i} & M(\Phi)_{n-1} & \xrightarrow{p} & A_{n-2} \longrightarrow 0 \end{array} .$$

Die Abbildung ∂_E aus dem Schlangenlemma ist nun wie folgt definiert. Sei $a \in \ker \partial_{n-1}$, dann können wir ein beliebiges $\tilde{b} \in B_n$ wählen und es gilt $(a, \tilde{b}) \in M(\Phi)_n$ mit $p((a, \tilde{b})) = a$. Da das Diagramm kommutiert und die untere Zeile exakt ist, erhalten wir:

$$\partial_n(a, \tilde{b}) = (-\partial_{n-1}a, \Phi(a) + \partial_n\tilde{b}) \in \text{im } i.$$

Also existiert ein $b \in B_{n-1}$, sodass $i(b) = \Phi(a) + \partial_n\tilde{b}$ gilt. Unsere Abbildung ist dann $\partial_E(a) := b$. Betrachten wir diese Abbildung dann auf Homologie-Ebene, bleibt nur noch $\partial_E(a) = \Phi(a)$ übrig. □

Korollar 6.4. *Die Kettenabbildung $\Phi : A \rightarrow B$ ist genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn alle Homologien des Abbildungskegels verschwinden.*

6.2 Frei erzeugter R -Modul

In dieser Arbeit taucht immer wieder das Konzept auf, einer beliebigen Menge eine algebraische Struktur zuzuordnen. Sei R ein kommutativer Ring mit eins, dann wollen wir aus einer beliebigen Menge A ein R -Modul machen.

Definition 6.5 (Frei erzeugter R -Modul). Sei A eine beliebige Menge. Wir definieren einen R -Modul

$$R[A] := \{f : A \rightarrow R \mid f(a) = 0 \text{ für fast alle } a \in A\}$$

mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation

$$\begin{aligned}(f + g)(a) &:= f(a) + g(a) \\ (s \cdot f)(a) &:= sf(a)\end{aligned}$$

für alle $a \in A$, $s \in R$ und $f, g \in R[A]$.

Bemerkung 6.6. Es ist nun leicht zu sehen, dass dies wirklich eine R -Modulstruktur auf $R[A]$ definiert. Zudem bilden die Elemente $\{f_a\}_{a \in A} \subset R[A]$, mit $f_a(a) = 1$ und 0 sonst, eine Basis. Wir haben also

$$R[A] \cong \bigoplus_{a \in A} R.$$

Zusätzlich ist eine natürliche Inklusion von $i : A \rightarrow R[A]$ gegeben durch $i(a) = f_a$, somit können wir ein $a \in A$ mit einem Basiselement identifizieren und wir unterscheiden nicht mehr, ob $a \in A$ oder $a \in R[A]$. Wir schreiben dann auch $\sum_{i=1}^n r_i a_i$ statt $\sum_{i=1}^n r_i f_{a_i}$.

Die freie abelsche Gruppe ist ein Spezialfall dieser Konstruktion, da man jede abelsche Gruppe als \mathbb{Z} -Modul auffassen kann.

6.3 Gruppenring

Eine Gruppe ist auch eine Menge und so können wir obiges auch auf eine Gruppe G anwenden. Wir haben dann zwei Verknüpfungen und erhalten:

Definition 6.7 (Gruppenring). Sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Wir betrachten die frei-erzeugte abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[G]$. Dies wird ein Ring mit der Multiplikation aus G , die wir distributiv auf Summen fortsetzen. Wir bezeichnen dann mit $\mathbb{Z}[G]$ den Gruppenring von G . Um einen strukturellen Unterschied zu verdeutlichen, schreiben wir dann $\mathbb{Z}G$ statt $\mathbb{Z}[G]$

Bemerkung 6.8. Der Ring $\mathbb{Z}G$ ist genau dann kommutativ, wenn die Gruppe G abelsch ist.

Beispiel 6.9. Sei $C_\infty = \langle t \rangle$ die unendliche zyklische Gruppe. Dann ist $\mathbb{Z}C_\infty = \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ der Ring der Laurent-Polynome.

Dieses Beispiel wird uns im übernächsten Abschnitt beschäftigen und deshalb werden wir darauf näher eingehen.

Lemma 6.10. *Die Einheiten von $\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ sind $\pm 1, \pm t^k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Es ist klar, dass dies Einheiten sind. Wir zeigen also, dass es alle sind. Sei $p \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ beliebig. Wir bezeichnen mit $\text{span}(p)$ die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Exponenten von p . So gilt zum Beispiel $\text{span}(t^3 - t^{-1}) = 4$. Da es in der Gruppe keine Torsion gibt, gilt für $p, q \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$:

$$\text{span}(pq) = \text{span}(p) + \text{span}(q).$$

Seien nun $p, q \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ mit $pq = 1$, dann muss also $\text{span}(q) = \text{span}(p) = 0$ gelten. Damit gilt entweder $p \in \mathbb{Z}$ oder $p = \pm t^k$. Die Einheiten von \mathbb{Z} sind ± 1 . Analoges gilt für q und somit folgt die Behauptung. \square

Ebenso lässt sich zeigen:

Satz 6.11. *Die Einheiten von $\mathbb{Z}[t_1^{-1}, t_1, \dots, t_l^{-1}, t_l]$ sind $\pm 1, \pm t_1^{k_1} \cdots t_l^{k_l}$ mit $k_1, \dots, k_l \in \mathbb{Z}$.*

Bevor wir das nächste Lemma zeigen, erinnern wir an einen Satz aus der Algebra.

Satz 6.12 (Satz von Gauß). *Sei R ein faktorieller Ring, dann ist $R[x]$ faktoriell.*

Lemma 6.13. *$\mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ ist ein faktorieller Ring. Insbesondere existiert also für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ der ggT(x, y).*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass sich jedes Element (bis auf Einheiten) eindeutig als Produkt von irreduziblen Elementen schreiben lässt. Sei p beliebig. Nachdem t^k eine Einheit ist, können wir durch Multiplikation mit k groß genug erreichen, dass $p' = t^k p$ nur positive Exponenten hat. Da p und p' assoziiert zueinander sind, reicht es, die Zerlegung für p' zu zeigen. Dies ist aber genau die Aussage, dass der Ring $\mathbb{Z}[x]$ ein faktorieller Ring ist, was unmittelbar aus dem Satz von Gauß folgt. \square

Korollar 6.14. *$\mathbb{Z}[t_1^{-1}, t_1, \dots, t_l^{-1}, t_l]$ ist ein faktorieller Ring und somit existiert für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{Z}[t_1^{-1}, t_1, \dots, t_l^{-1}, t_l]$ der ggT(x, y).*

Beweis. Es gilt:

$$(\mathbb{Z}[t_1^{-1}, t_1]) [t_2^{-1}, t_2] \cong \mathbb{Z}[t_1^{-1}, t_1, t_2^{-1}, t_2].$$

Damit folgt die Aussage direkt aus dem vorangegangenen Lemma und dem Satz von Gauß. \square

Satz 6.15. *Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gibt es einen induzierten Ringhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \varphi_* : \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}H \\ \sum_{g \in G} n_g g &\longmapsto \sum_{g \in G} n_g \varphi(g) \quad , \text{ wobei fast alle } n_g \text{ gleich null sind} \end{aligned}$$

Dies kann man auch auffassen als einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen in die der Ringe. Eine weitere eher technische Definition ist die Auswertungs-Abbildung:

$$\begin{aligned} \epsilon : \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{g \in G} n_g g &\longmapsto \sum_{g \in G} n_g \quad , \text{ wobei fast alle } n_g \text{ gleich null sind} \end{aligned}$$

6.4 Fox-Kalkül

Im folgenden Abschnitt sind mit Gruppen immer endlich präsentierte Gruppen gemeint.

Definition 6.16. Sei $G = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ eine endlich präsentierte Gruppe und $\mathbb{Z}[G]$ der Gruppenring mit \mathbb{Z} Koeffizienten. Sei $x_i \in G$ ein Erzeuger. Wir bezeichnen mit $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die Abbildung, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist:

- $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $\frac{\partial}{\partial x_i}(e) = 0$
- $\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u) + u \frac{\partial}{\partial x_i}(v)$.

Wir können dann jeder Gruppe $G = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ die Matrix zuordnen:

$$JG = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(r_1) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(r_k) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}(r_k) \end{pmatrix}.$$

Natürlich hängt diese noch von der Wahl der Präsentation ab. Betrachten wir ein paar Rechenregeln, mit deren Hilfe sich dann alle Wörter ableiten lassen.

Lemma 6.17. Sei $G = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_k \rangle$ und $u \in G$. Es gilt:

1. $\frac{\partial}{\partial x_j}(u^{-1}) = -u^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(u)$,
2. $\frac{\partial}{\partial x_j}(ux_jv) = u + ux_j \frac{\partial}{\partial x_j}(v)$ für $x_j \notin u$,
3. $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^n) = 1 + x_j + x_j^2 + \dots + x_j^{n-1}$,
4. $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^{-n}) = -x_j^{-n} - \dots - x_j^{-1}$.

Beweis. 1.) Es muss gelten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_j}(u^{-1} \cdot u) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(e) \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(u^{-1}) + u^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(u) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(u^{-1}) &= -u^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(u).\end{aligned}$$

2.)

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(wx_jv) = \frac{\partial}{\partial x_j}(w) + w \frac{\partial}{\partial x_j}(x_jv) = w \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j) + x_j \frac{\partial}{\partial x_j}(v) \right) = w + wx_j \frac{\partial}{\partial x_j}(v).$$

3.) Für den Fall $n = 1$ ist es klar. Wir zeigen jetzt den Induktionsschritt $(n - 1) \rightarrow n$.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^n) = 1 + x_j \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^{n-1}) = 1 + x_j(1 + \dots + x_j^{n-2}) = 1 + x_j + x_j^2 + \dots + x_j^{n-1}.$$

4.) Mit 1.) und 3.) folgt dann:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^{-n}) = -x_j^{-n} \frac{\partial}{\partial x_j}(x_j^n) = -x_j^{-n} (1 + x_j + \dots + x_j^{n-1}) = -x_j^{-n} - \dots - x_j^{-1}$$

□

Beispiel 6.18. Sei K der Kleeblatt-Knoten. Dann gilt:

$$\pi(S^3 \setminus K) = \langle x, y \mid x^3y^{-2} = 0 \rangle.$$

Und wir erhalten die Matrix

$$JG = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^{-2}) \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^3y^{-2}) \right) = (1 + x + x^2 \quad -1 - y).$$

Wir können auch Elemente aus $\mathbb{Z}G$ ableiten, indem wir

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(u + w) := \frac{\partial}{\partial x_j}(u) + \frac{\partial}{\partial x_j}(w)$$

fordern und die Produktregel ändern zu

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial}{\partial x_i}(u) \cdot \epsilon(v) + u \frac{\partial}{\partial x_i}(v).$$

Damit ist es uns möglich, die Produktregel zu motivieren. In einer Gruppe G sind Relationen oft in der Form $u = w$ gegeben. Im Gruppenring liefert uns das entweder die Relation $uw^{-1} = 1$ oder $u - w = 0$. Das folgende Lemma besagt nun, dass es für das Fox-Derivat keine Rolle spielt, welche Relation wir ableiten.

Lemma 6.19. *Es gilt:*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uw^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(u - w),$$

Beweis.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uw^{-1}) = \tag{6.1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(u) + u \frac{\partial}{\partial x_j}(w^{-1}) \tag{6.2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(u) + u \left(-w^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(w) \right) \tag{6.3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(u) - uw^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(w) \tag{6.4}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(u) - e \frac{\partial}{\partial x_j}(w) \tag{6.5}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(u) - \frac{\partial}{\partial x_j}(w) \tag{6.6}$$

□

Wie bereits erwähnt ist die Matrix JG selber keine Invariante der Gruppe. Aber es lassen sich sehr leicht Invarianten daraus ableiten, wie man in [5] nachlesen kann. Für uns reicht es, damit rechnen zu können.

6.5 Berechnung des Alexander-Polynoms mit Hilfe des Fox-Kalküls

In diesem Abschnitt werden wir eine Möglichkeit vorstellen, das Alexander-Polynom mit Hilfe des Fox-Kalküls und der Knotengruppe zu berechnen. Dazu benötigen wir noch etwas mehr Algebra. Wir hatten gesehen, dass wir einen induzierten Ringhomomorphismus $\varphi_* : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}H$ erhalten, wenn $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Dann können wir die Matrix betrachten:

$$JG^\varphi := \begin{pmatrix} \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(r_1) \right) & \cdots & \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_n}(r_1) \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(r_k) \right) & \cdots & \varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_n}(r_k) \right) \end{pmatrix}.$$

In diesem Abschnitt interessieren wir uns für einen ganz besonderen Gruppenhomomorphismus. Sei G eine Knotengruppe. Wir bezeichnen mit G_{ab} die Abelisierung von G und mit Ψ die Projektionsabbildung

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow G_{ab} \\ g &\mapsto [g]. \end{aligned}$$

Da wir uns hier auf Knotengruppen beschränken, gilt immer: $G_{ab} \cong \mathbb{Z}$ oder allgemeiner für Verschlingungen $G_{ab} \cong \mathbb{Z}^l$. Mit Hilfe der Wirtinger-Präsentation oder mit der Neuwirth-Präsentation erhalten wir eine Knotengruppe mit n Erzeugern und $n - 1$ Relationen. Das liefert uns eine $(n - 1) \times n$ Matrix. Durch das Streichen jeweils einer Spalte erhalten wir also eine quadratische Matrix, von der wir die Determinante bestimmen können. Jetzt nehmen wir alle Werkzeuge zusammen und formulieren ohne Beweis

Satz 6.20. *Sei L eine Verschlingung. Sei $G = \pi(S^3 \setminus L)$ durch n Erzeuger und $n - 1$ Relationen präsentiert. Sei E_i die Determinante von der Matrix JG^Ψ , wo die i -te Spalte gestrichen wurde. Dann gilt:*

$$\Delta_L(t_1, \dots, t_l) = \text{ggT}(E_1, \dots, E_n),$$

wobei $\Delta_L(t_1, \dots, t_l)$ das Alexander-Polynom der Verschlingung L bezeichnet.

Beispiel 6.21. Wir hatten bereits gesehen, dass für den Kleeblattknoten gilt:

$$JG = \begin{pmatrix} 1 + x + x^2 & -y - 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}[t^{-1}, t] \\ x &\mapsto t^2 \\ y &\mapsto t^3. \end{aligned}$$

Und damit

$$JG^\Psi = \begin{pmatrix} 1 + t^2 + t^4 & -t^3 - 1 \end{pmatrix}.$$

Also

$$\Delta_K(t) = \text{ggT}(t^4 + t^2 + 1, -t^3 - 1) = t^2 - t + 1.$$

Beispiel 6.22. Wir hatten für den Achterknoten 4_1 gesehen, dass eine Präsentation durch

$$\begin{aligned} \pi(S^3 \setminus 4_1) = \langle x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \mid & x_0x_3 = e, \\ & x_0x_1x_3x_5 = e, \\ & x_1x_2x_3x_5 = e, \\ & x_2x_3x_4x_5 = e, \\ & x_2x_4 = e \rangle \end{aligned}$$

gegeben ist, was die Matrix

$$JG := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & 0 & x_0x_1 & 0 & x_0x_1x_3 \\ 0 & 1 & x_1 & x_1x_2x_3 & 0 & x_1x_2x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2x_3 & x_2x_3x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert. Außerdem hatten wir in Abschnitt 1.3 die Abbildung Ψ angegeben und somit erhalten wir

$$JG^\Psi := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & t^{-1} & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & t & t & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & t^{-1} & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Eine geduldige Rechnung ergibt das korrekte Alexander-Polynom

$$\Delta_{4_1}(t) = t - 3 + t^{-1}$$

Dieses Resultat erhält man schon, wenn man nur E_4 berechnet. Dies ist kein Zufall. Denn es gilt allgemein für einen Knoten K :

Satz 6.23. *Sei $G = \pi(S^3 \setminus K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_{n-1} \rangle$ durch n Erzeugern und $n - 1$ Relationen präsentiert. Wenn $[x_i]$ ein Erzeuger von $H_1(S^3 \setminus K)$ ist, dann gilt:*

$$E_i = \Delta_K(t).$$

Insbesondere ist es bei der Wirtinger-Präsentation oder der Neuwirth-Präsentation egal, welche Spalte man streicht.

Mehr zu diesem Thema und auch die Beweise zu diesen Aussagen finden sich in [2], Kapitel 8 und 9.

Literatur

- [1] J. A. Baldwin and W. D. Gillam, *Computations of Heegaard-Floer knot homology*, Preprint, [arXiv:math.GT/0610167](https://arxiv.org/abs/math/0610167).
- [2] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter Stud. Math., vol. 5, New York, 2003.
- [3] P. R. Cromwell, *Embedding knots and links in an open book. I. Basic properties*, Topology Appl., **64** (1995), no. 1, 37-58.
- [4] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory* M.K. Fort (Ed.), "Topology of 3-Manifolds and Related Topics", Prentice-Hall, NJ, 1961, 120-167.
- [5] R. H. Fox, *Free differential calculus. I: Derivation in the free group ring*, Ann. of Math. (2), **57** (1953), no. 3, 547-560.
- [6] C. Manolescu, P. Ozsváth, and S. Sarkar, *A combinatorial description of knot Floer homology*, Ann. of Math. (2), **169** (2009), no. 2, 633-660.
- [7] C. Manolescu, P. Ozsváth, Z. Szabó, and D. Thurston, *On combinatorial link Floer homology*, Geom. Topol., **11** (2007), 2339-2412.
- [8] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Holomorphic disks and genus bounds*, Geom. Topol., **8** (2004), 311-334.